ბროუნის ფუნქციონალების სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენების შესახებ

ო. ფურთუხია
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, მათემატიკის დეპარტამენტი

იტოს აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ სტოქასტური ინტეგრალი როგორც პროცესი, კვადრატით ინტეგრებადი შეთანხმებული პროცესიდან, წარმოადგენს კვადრატით ინტეგრებად მარტინგალს. შებრუნებულ კითხვაზე: ბროუნის ბუნებრივ ფილტრაციასთან შეთანხმებული კვადრატით ინტეგრებადი მარტინგალი წარმოიდგინება თუ არა სტოქასტური ინტეგრალის სახით, პასუხს იძლევა კარგად ცნობილი კლარკის თეორემა (1971). კერძოდ, ვთქვათ B_t , $t \in [0,T]$, სტანდარტული ბროუნის მოძრაობაა, ხოლო $\Im_t$ ბროუნის მოძრაობით წარმოქმნილი ბუნებრივი ფილტრაციაა. თუ F არის კვადრატით ინტეგრებადი $\Im_T$ -ზომადი შემთხვევითი სიდიდე, მაშინ მოიძებნება $\Im_t$ ფილტრაციასთან შეთანხმებული ისეთი კვადრატით ინტეგრებადი შემთხვევითი პროცესი φ_t , რომ $F = EF + \int_0^T \varphi_t dB_t$. მეორე მხრივ, φ_t პროცესის ცხადი სახით დადგენა ძალიან რთული ამოცანაა. ამ მიმართულებით ცნობილია ერთი, საკმაოდ ზოგადი შედეგი, რომელსაც ოკონე-კლარკის ფორმულას უწოდებენ (1984) და რომლის თანახმადაც $\varphi_t = E(D_t F \mid \Im_t)$, სადაც D_t -- ე.წ. მალივენის სტოქასტური წარმოებულია. მაგრამ, აქ ერთი მხრივ მოითხოვება სტოქასტური სიგლუვე და მეორე მხრივ, მაშინაც კი როცა სიგლუვე გვაქვს, მალივენის წარმოებულისა და პირობითი მათემატიკური ლოდინის გამოთვლა საკმაოდ შრომატევადია.

შემდგომი ნაბიჯი ამ მიმართულებით ეკუთვნის მა, პროტერს და მარტინს (1998), რომლებმაც შემოგვთავაზეს სტოქასტური წარმოებულისა და განზოგადებული სტოქასტური ინტეგრალის ცნება ე.წ. ნორმალურ მარტინგალთა კლასისთვის და განაზოგადეს კლარკის ფორმულა ფუნქციონალებისთვის $D_{2,1}^M$ კლასიდან ($F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in D_{2,1}^M \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n n! \| f_n \|^2_{L_2([0,T]^n)} < \infty$). ჩვენ (ფურთუხია, 2003) შემოვიღეთ $D_{p,1}^M$, $1 < p < 2$, სივრცე ($D_{p,1}^M$ არის ბანახის სივრცე, რომელიც წარმოადგენს $D_{2,1}^M$ -ის ჩაკეტვას $\| F \|_{p,1} := E(\| F \|_{L_p} + \| D_{\cdot} F \|_{L_2([0,T])})$ ნორმის მიმართ) და განვაზოგადეთ ოკონე-ჰაუსმან-კლარკის ფორმულა ფუნქციონალებისთვის ამ სივრციდან. φ_t პროცესის პოვნის სრულიად განსხვავებული მეთოდი შემოთავაზებული იყო შირიაევის, იორისა და გრავერსენის მიერ (2003, 2006), რომელიც დაფუძნებული იყო იტოს (განზოგადებული) ფორმულისა და ლევის თეორემის გამოყენებაზე F სიდიდესთან დაკავშირებული ლევის მარტინგალისათვის $m_t = E(F \mid \Im_t)$. ჩვენ (ფურთუხია, ჯაოშვილი, 2009) შემოვიღეთ სტოქასტური წარმოებულის ახალი კონსტრუქცია პუასონის ფუნქციონალებისათვის და დავადგინეთ კლარკის წარმოდგენის ინტეგრანდის ცხადი სახე.

ყველა ზემოთ აღწერილ შემთხვევაში F იყო სტოქასტურად გლუვი. ჩვენ (პროფ. ო.ღლონტთან ერთად, 2014) განვიხილეთ შემთხვევა, როცა F არ იყო სტოქასტურად გლუვი, მაგრამ მასთან დაკავშირებული ლევის მარტინგალიდან გამოიყოფოდა სტოქასტურად გლუვი ქვემიმდევრობა და მოვიყვანეთ ინტეგრალქვეშა გამოსახულების გამოთვლის მეთოდი. აქ ჩვენ ვიხილავთ განსხვავებულ შემთხვევას, როცა ფუნქციონალი წარმოადგენს სტოქასტურად არაგლუვი კვადრატით ინტეგრებადი პროცესიდან ლებეგის ინტერგალს დროითი ცვლადის მიმართ.

თეორემა. სამართლიანია შემდეგი სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა

$$\int_0^T I_{\{B_t \le c\}} dt = \int_0^T \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{t}}\right) dt - \int_0^T \left(\int_s^T \frac{1}{\sqrt{t-s}} \varphi\left(\frac{c - B_s}{\sqrt{t-s}}\right) dt \right) dB_s ,$$

სადაც Φ (შესაბამისად, φ) სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციაა (შესაბამისად, სიმკვრივეა), $c = const$.

Acknowledgement. The work is supported by Shota Rustaveli National Science Foundation Grant No FR/308/5-104/12.