ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

მარიკა ეცადაშვილი

ფურიეს შეუღლებული მწკრივების კრებადობისა და თანაბარი კრებადობის შესახებ

(სამაგისტრო ნაშრომი)

ხელმძღვანელი: თსუ-ს ასოც.პროფ.

ფიზ. მათ. მეცნ. დოქტორი

თეიმურაზ ახობაძე

2016 წელი

§1.შესავალი

ვთქვათ, f ფუნქცია უწყვეტი და 2π-პერიოდული ფუნქციაა,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt) \qquad (0)$$

მისი ფურიეს მწკრივია, ხოლო, S_n(x,f) ამ მწკრივის კერძო ჯამია.

$\tilde{s}_n$(x,f)-ით აღვნიშნოთ f ფუნქციის ფურიეს შეუღლებული მწკრივის კერძო ჯამი. ამასთან f(t) ∈ L(0,2π) ფუნქციისათვის ვიგულისხმოთ , რომ

$$\Phi(n)=\min\left\{n, inf_{\substack{x\in[0,2\pi]\\ |b-a|\le 2\pi}}\frac{\int_0^{2\pi}|f(t)|dt}{\int_a^b f(x+t)\cos nt dt}\right\}, \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

ω(δ,f)-ით აღვნიშნოთ f ფუნქციის უწყვეტობის მოდული, ანუ

$$\omega(\delta,f)= sup_{|x_1-x_2|\le\delta}\ |f(x_1)-f(x_2)|, \quad x_1,\quad x_2\in[0,2\pi].$$

ქვემოთ დაგვჭირდება მიმდევრობის წერტილში თანაბარი კრებადობის ცნება: ვიტყვით, რომ f_n ფუნქციათა მიმდევრობა არის თანაბრად კრებადი x_0 წერტილში A რიცხვისაკენ, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta(\varepsilon)>0$ და $N(\varepsilon)>0$ რიცხვები, რომ ნებისმიერი $x\in(x_0-\delta(\varepsilon),x_0+\delta(\varepsilon))$ და ნებისმიერი $n\in N$, რომლისთვისაც $n>N(\varepsilon)$, გვექნება

$$|f_n(x)-A|<\varepsilon.$$

დავუშვათ, E_n(f) f ფუნქციის საუკეთესო მიახლოებაა ტრიგონომეტრიული პოლინომებით, რომელთა რიგი არ აღემატება n-ს, ანუ

$$E_n(f)=inf_{T_n}\max_x|f(x)-T_n(x)|,$$

სადაც T_n წარმოადგენს ნებისმიერ ტრიგონომეტრიულ პოლინომს, რომლის რიგიც არ აღემატება n-ს.

ცნობილია, რომ უწყვეტი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი არა თუ თანაბრად კრებადია, არამედ, შესაძლებელია, განშლადიც იყოს ([1], გვ.130-137). ამიტომ, არსებობს სხვადასხვა საკმარისი ნიშანი, რომლებიც უზრუნველყოფს უწყვეტი ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის თანაბრად კრებადობას. ეს დამატებითი პირობები ძირითადად იყოფა სამ ჯგუფად:

1) პირობები, რომლებიც ეხება მხოლოდ ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტებს.
2) პირობები, რომლებიც ეხება მხოლოდ ფუნქციას.
3) შერეული ტიპის პირობები, ანუ, ისეთი პირობები, რომლებიც ზღუდავს როგორც ფუნქციას, ისე მის ფურიეს კოეფიციენტებს.

დავიწყოთ პირველი ჯგუფის პირობებით.

ჯერ კიდევ 1906 წელს ფატუმ [2] დაამტკიცა მთელი რიგი მნიშვნელოვანი დებულებები ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივებთან დაკავშირებით, რომელთა ფურიეს კოეფიციენტებს ჰქონდა $o(1/n)$ რიგი. აღსანიშნავია, რომ მისი მრავალი დებულება რჩება ძალაში, ფურიეს კოეფიციენტებისათვის, რომელთათვისაც სრულდება პირობა

$$\sum_{k=1}^{n} k(|a_k| + |b_k|) = o(n).$$

1932 წელს პელიმ [3] დაამტკიცა, რომ უწყვეტი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი არაუარყოფითი ფურიეს კოეფიციენტებით თანაბრად კრებადია.

მოგვიანებით სასმა [4] გააუმჯობესა პელის ეს დებულება. დაამტკიცა რა, რომ თუ f ფუნქცია უწყვეტია და მისი ფურიეს კოეფიციენტები აკმაყოპილებენ პირობას $\mathrm{n}a_n \geq -c$, $\mathrm{n}b_n \geq -c$, სადაც $\mathrm{c} > 0$, მაშინ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია.

მეორე ჯგუფის პირობებს მიეკუთვნება, მაგალითად, დინი-ლიფშიცის (იხ.მაგ. [5], გვ. 108) პირობები ფურიეს მწკრივის თანაბარი კრებადობის შესახებ. კერძოდ, 2π-პერიოდული, უწყვეტი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია, თუ f-ის უწყვეტობის მოდულს აქვს რიგი $o\left\{1/(\log\frac{1}{\delta})\right\}$ $(\delta \to +0)$. ლებეგმა [6] (იხ. ასევე, [1]) გააუმჯობესა დინი-ლიფშიცის ნიშანი და დაამტკიცა, რომ

$$||f(.) - S_n(.\ ,f)||_c \leq \mathrm{C}\, E_n(\mathrm{f}) \ln \mathrm{n},$$

სადაც C - აბსოლუტური კონსტანტაა.

დინი-ლიფშიცის პირობის სხვა მიმართულებით განზოგადება მოგვცა სალემმა [7]. ამ ჯგუფის შედეგებს მიეკუთნება ჟორდანის ნიშანი (იხ. [5], 98) სასრული ვარიაციის ფუნქციებზე და ა. შ.

1953 წელს ნეშმა [8] შემოიღო $\bar{\Phi}$ ფუნქციათა კლასი.

ვთქვათ, Φ არის დადებითი ფუნქცია ნატურალური არგუმენტით. ვიტყვით,რომ უწყვეტი, 2π-პერიოდული f ფუნქცია ეკუთვნის $\bar{\Phi}$ კლასს, თუ

$$\left|\int_a^b f(x+t)\cos nt\, dt\right| \leq \frac{1}{\Phi(n)}, \quad \mathrm{n} \in N$$

თანაბრად $x \in [0, 2\pi]$, a,b, $(|b-a| \leq 2\pi)$- ის მიმართ.

ნეშმა [8] დაამტკიცა, რომ თუ უწყვეტი, 2π-პერიოდული f ფუნქცია ეკუთვნის $\bar{\Phi}$ კლასს, სადაც

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi(n)}{n}=+\infty,$$

მაშინ $f\equiv 0$. ამიტომ, ბუნებრივია, ვივარაუდოთ, რომ $\Phi(n)=O(n)$. ამავე ნაშრომში ნეშმა დაამტკიცა თეორემა შერეული ტიპის პირობებით, საიდანაც მიიღება $\bar{\Phi}$ კლასის ფუნქციათა ფურიეს მწკრივის თანაბრად კრებადობის სხვადასხვა ნიშანი.

1954 წელს მ.სატომ [9], (იხ. [1], გვ. 299) დააზუსტა ნეშის ნაჩვენები ნიშანი, კერძოდ, მან დაამტკიცა შემდეგი

თეორემა. ვთქვათ, $f\in\bar{\Phi}$, მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი A, B და C მუდმივები, რომ

$$\|S_n(\,.\,,f)-f(\,.\,)\|_c\le\omega\left(\frac{1}{n},f\right)\left[A\ln\theta(n)+B\ln\frac{n}{\Phi(n)}\right]+\frac{C}{\theta(n)},$$

სადაც θ - მონოტონურად ზრდადი ფუნქციაა და $1\le\theta(n)\le\Phi(n)$.

შერეული ტიპის პირობებს მიეკუთნება ა. ზახაროვის ([10]) ქვემოთ მოცემული A და B თეორემები ფურიეს მწკრივის კრებადობისა და თანაბრად კრებადობის შესახებ.

ვთქვათ,

$$F(x)=\int_0^x\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]dt,$$

$$\Phi(n)=\min\left\{n,\inf_{\substack{x\in[0,2\pi]\\|b-a|\le2\pi}}\frac{\int_0^{2\pi}|f(t)|dt}{\int_a^b f(x+t)\cos nt\,dt}\right\},\qquad (n=1,2,3,\dots)$$

და

$$m_x(\delta; q) = sup_{0\le h\le\delta}\ sup_{0\le t\le\frac{q(n)}{\Phi(n)}} |F(x+h+t)+F(x-h-t)-2F(x+t)-$$

$$-F(x+h-t)-F(x-h-t)+2F(x-t)| = sup_{0\le h\le\delta}\ sup_{0\le t\le\frac{q(n)}{\Phi(n)}} \left|\int_0^h \{f(x+t+u)-\right.$$

$$\left.-f(x+t-u)-f(x-t+u)+f(x-t-u)\}du\right|. \qquad (1\le q(n)\le \Phi(n))$$

თეორემა A.

ვთქვათ, $f(t)\epsilon L(0;2\pi)$ და x წერტილში სრულდება პირობა:

$$\int_0^t \{f(x+u)+f(x-u-2f(x)\}\, du = o(t), \qquad t\to 0.$$

თუ არსებობს $q(n)$ მიმდევრობა ისეთი, რომ $q(n)\to\infty, \frac{q(n)}{\Phi(n)}\to 0$ და

$$n\cdot m_{x_n}\left(\frac{1}{n},q\right) ln\frac{n}{\Phi(n)} = o(t), \qquad n\to\infty,$$

მაშინ $f(t)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი x წერტილში კრებადია $f(x)$-კენ.

თეორემა B.

ვთქვათ, $f(t)\epsilon L(0;2\pi)$ და არსებობს $q(n)$ მიმდევრობა ისეთი, რომ $q(n)\to\infty$, $\frac{q(n)}{\Phi(n)}\to 0$, $n\to\infty$, და ნებისმიერ (x_n) და (τ_n) მიმდევრობისათვის, რომლისთვისაც $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ და $\lim_{n\to\infty}\tau_n = 0$, სრულდება პირობები :

$$sup_{\tau\in[-\tau_n,\tau_n]} |f(x_n+\tau)-f(x_n)| = o(1), \quad n\to\infty,$$

$$n\cdot m_{x_n}\left(\frac{1}{n},q\right) ln\frac{n}{\Phi(n)} = o(t), \qquad n\to\infty.$$

მაშინ $f(t)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია x წერტილში.

სამაგისტრო ნაშრომის მიზანია ზახაროვის აღნიშნული დებულებების განზოგადება შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივებისათვის.

§2.ძირითადი დებულებები

ვთქვათ, $f(t)\epsilon L(0;2\pi)$. რიცხვთა ნებისმიერი $q(n)$ $(1 \le q(n) \le \Phi(n))$ მიმდევრობისათვის განვსაზღვროთ :

$$\widetilde{m}_x(\delta; q) = sup_{0\le h\le \delta}\ sup_{0\le t\le \frac{q(n)}{\Phi(n)}} \left| \int_0^h \Psi_x(\tau+h) + \Psi_x(\tau-h) - 2\Psi_x(\tau)\, du \right|,$$

სადაც $\Psi_x(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) - f(x-t)]$. აგრეთვე ვიგულისხმოთ, რომ

$$\tilde{f}\left(x;\frac{\pi}{n}\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{n}} + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\right)\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2tg\,\frac{t}{2}}dt$$

სამართლიანია

თეორემა 1.

ვთქვათ, $f(t)\epsilon L(0;2\pi)$. ვიგულისხმოთ, რომ x წერტილში შესრულებულია პირობა

$$\int_0^t \Psi_x(\tau)d\tau = o(t), \text{როცა } t \to 0. \qquad (1)$$

თუ არსებობს ისეთი $q(n)$ მიმდევრობა, რომ $q(n) \to \infty, \frac{q(n)}{\Phi(n)} \to 0$ და

$$n \cdot \widetilde{m}_{x_n}\left(\frac{1}{n}, q\right) ln\frac{n}{\Phi(n)} = o \quad (1), \qquad n \to \infty, \qquad (2)$$

მაშინ

$$\tilde{S}_n(x,f) - \tilde{f}(x,\frac{\pi}{n}) \to o, \qquad n \to \infty. \tag{3}$$

აღსანიშნავია, რომ თუ (1) და (2) პირობები x-ის მიმართ თანაბრად სრულდება, მაშინ (3)-ში მისწრაფება, ასევე, თანაბარია.

შევნიშნოთ, რომ ადგილი აქვს თეორემა (1)-ის ანალოგს წერტილში თანაბარი კრებადობისთვის, კერძოდ, სამართლიანია:

თეორემა 2. ვთქვათ $f(t)\epsilon L(0;2\pi)$. დავუშვათ აგრეთვე, რომ x წერტილისკენ კრებადი ყოველი (x_n) მიმდევრობისთვის სრულდება პირობა :

$$\int_0^t\{f(x_n+u)-f(x_n-u)\}du = o(t), \qquad t \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{4}$$

ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს ისეთი $q(n)$ მიმდევრობა, რომლისთვისაც

$$q(n) \to \infty, \quad \frac{q(n)}{\Phi(n)} \to 0$$

და

$$n \cdot \widetilde{m}_{x_n}\left(\frac{1}{n},q\right) ln\frac{n}{\Phi(n)} = o\ (1), \qquad n \to \infty. \tag{5}$$

მაშინ

$$\tilde{S}_n(x_n,f) - \tilde{f}(x_n,\frac{\pi}{n}) \to o(1), \qquad n \to \infty. \tag{6}$$

ამის გარდა, ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას.

თეორემა 3. ვთქვათ $f(t)\epsilon L(0;2\pi)$ და არსებობს ისეთი $q(n)$ მიმდევრობა, რომ $q(n) \to \infty$, $\frac{q(n)}{\Phi(n)} \to 0$. ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ ნებისმერი x_n და τ_n მიმდევრობებისსა-თვის, რომელთათვისაც $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ და $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$, სრულდება პირობები:

$$sup_{\tau\in[-\tau_n,\tau_n]}|f(x_n+\tau)-f(x_n)| = o(t), \qquad n\to\infty, \tag{7}$$

$$n\cdot \widetilde{m}_{x_n}\left(\frac{1}{n},q\right) ln\frac{n}{\Phi(n)} = o(t) \quad (1), \qquad n\to\infty. \tag{8}$$

მაშინ x წერტილში $\tilde{S}_n(x,f)-\ \tilde{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)$ თანაბრად კრებადია 0-კენ, როცა $n\to\infty$.

§3. ძირითადი დებულების შედეგები

შედეგი 1.1 ვთქვათ, $f(t)\epsilon L(0;2\pi)$ და

$$a_n = o\left(\frac{e^{(lnn)^\alpha}}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{e^{(lnn)^\alpha}}{n}\right), \quad (0\le\alpha\le1)$$

და x წერტილში სრულდება პირობა

$$f(x+t)-f(x) = \ o\left(\frac{1}{\left(ln\frac{1}{|t|}\right)^\alpha}\right), \qquad t\to0, \tag{9}$$

მაშინ

$$\tilde{S}_n(x,f)-\ \tilde{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)\to o(1), \qquad n\to\infty.$$

დამტკიცება. (9) შეფასებიდან მივიღებთ

$$\left|\int_a^b f(x+t)cosntdt\right| \le c\sum_{\substack{k=1\\n\neq k}}^{\infty}\frac{e^{(lnk)^{\alpha}}}{k|n-k|}$$

მართლაც,

$$f(t)\sim\frac{a_o}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k coskt+b_k sinkt.$$

გვაქვს:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)cosktdt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)cosk(\tau-x)d\tau=\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)cosk\tau d\tau=-\frac{sinnx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)sink\tau d\tau$$

$$=cosnxa_n-sinnxb_n.$$

ამიტომ

$$\int_a^b f(x+t)cosntdt=$$

$$\frac{a_o}{2}\int_a^b cosntdt+cosnx\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b cosntcoskta_k--sinnx\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b cosntsinkt\cdot b_k\ .$$

ამის გარდა,

$$\int_a^b cosntdt=-\frac{sinnt}{n}\Big|_a^b$$

$$\left|\int_a^b f(x+t)cosntdt\right|\le\frac{c}{n}+\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(n-k)\,tdt\right|+\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\cos(n+k)\,tdt\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_a^b\sin(n-k)\,tdt\right|+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_a^b\sin(n+x)\,tdt\le\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{c}{|n-k|}+\frac{c}{n}\le$$

$$\le\quad C\sum_{\substack{k=1\\n\neq k}}^{\infty}\frac{e^{(lnk)^{\alpha}}}{k|n-k|}\,.$$

შევაფასოთ უკანასკნელი ჯამის სამი შემადგენელი ნაწილი. პირველი -

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{e^{(lnk)^{\alpha}}}{k(n-k)}\leq c\,\frac{e^{(lnn)^{\alpha}}}{n}lnn;$$

მეორე -

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{2n}\frac{e^{(lnk)^{\alpha}}}{k|n-k|}\leq\frac{4}{n}\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{2n}\frac{e^{(lnk)^{\alpha}}}{|n-k|}=\frac{4}{n}\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1}\frac{e^{(lnk)^{\alpha}}}{|n-k|}+\frac{4}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{e^{(lnk)^{\alpha}}}{|n-k|}\leq$$

$$\leq\quad\frac{C}{n}e^{(lnk)^{\alpha}}\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1}\frac{1}{|n-k|}+\frac{c}{n}e^{(lnn)^{\alpha}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{|n-k|}\leq\frac{c}{n}e^{(lnn)^{\alpha}}\sum_{m=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]-1}\frac{1}{m}=$$

$$=\quad\frac{C}{n}e^{(lnn)^{\alpha}}lnn;$$

მესამე -

$$\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{e^{(lnk)^{\alpha}}}{k(n-k)}\leq$$

$$\leq 2\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{e^{(lnk)^{\alpha}}}{k^2}\leq c\int_{n}^{\infty}\frac{e^{(lnx)^{\alpha}}}{x^2}dx\leq\quad C\int_{n}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(-\frac{e^{(lnx)^{\alpha}}}{x}lnx\right)dx=$$

$$=c\,\frac{e^{(lnn)^{\alpha}}}{n}lnn.$$

მართლაც,

$$-\left[\left(e^{(lnx)^{\alpha}}\right)'\cdot\frac{lnx}{x}+e^{(lnx)^{\alpha}}\frac{\frac{1}{x}\cdot x-lnx\cdot 1}{x^2}\right]=\left[\left(e^{(lnx)^{\alpha}}\right)\cdot\alpha\cdot(lnx)^{\alpha-1}\frac{lnx}{x^2}+e^{(lnx)^{\alpha}}\frac{1-lnx}{x^2}\right]=$$

$$=\frac{e^{(lnx)^{\alpha}}}{x^2}\,lnx-\frac{e^{(lnx)^{\alpha}}}{x^2}\cdot\alpha\cdot(lnx)^{\alpha}-\frac{e^{(lnx)^{\alpha}}}{x^2}\geq c\,\frac{e^{(lnx)^{\alpha}}}{x^2}lnx.$$

მესამე ჯამის შეფასებისას ასევე გამოვიყენეთ მწკრივის კრებადობის ინტეგრალური ნიშანი.

მიღებული თანაფარდობებიდან მივიღბთ, რომ

$$\sup_{\substack{x\in[0;2\pi]\\ |b-a|\le 2\pi}}\left|\int_a^b f(x+t)cosntdt\right|\le c\frac{e^{(lnn)^{\alpha}}}{n}lnn.$$

ამიტომ $\Phi(n)$ −ის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს

$$c\frac{n}{e^{(lnn)^{\alpha}}lnn}\le\ \Phi(n)\le n. \qquad (10)$$

მართლაც,

$$\Phi(n)=\min\left\{n,\ \inf_{\substack{x\in[0,2\pi]\\ |b-a|\le 2\pi}}\frac{\int_0^{2\pi}|f(t)|dt}{\int_a^b f(x+t)\cos ntdt}\right\}= \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

$$=\min\left\{n,\frac{\int_0^{2\pi}|f(t)|dt}{\sup_{\substack{x\in[0,2\pi]\\ |b-a|\le 2\pi}}\int_a^b f(x+t)\cos ntdt}\right\}\ge\min\left\{n,c\frac{e^{(lnn)^{\alpha}}lnn}{n}\right\}=c\frac{e^{(lnn)^{\alpha}}lnn}{n}.$$

ვთქვათ, $q(n)=lnn.$ მაშინ (9), (10)-დან მივიღებთ :

$$\widetilde{m_x}\left(\frac{1}{n},q\right)=\sup_{0\le h\le\frac{1}{n}}\ \sup_{0\le t\le\frac{lnn}{\Phi(n)}}=\frac{1}{2}\left|\int_0^h[f(x+\tau+h)-f(x-\tau-h)+f(x+\tau-h)-\right.$$

$$\left.-f(x-\tau+h)-2f(x+\tau)+2f(x-\tau)]d\tau\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2}\sup_{0\le h\le\frac{1}{n}}\ \sup_{0\le t\le\frac{lnn}{\Phi(n)}}\int_a^b[|f(x+\tau+h)-f(x+\tau)|+|f(x-\tau)-f(x-\tau-h)|+$$

$$+|f(x_n+\tau-h)-f(x_n-\tau)|+|f(x_n-\tau)-f(x_n-\tau+h)|d\tau]=$$

$$= o\left(\sup_{0 \le h \le \frac{1}{n}} \int_0^h \frac{1}{\left(ln\frac{1}{|u|}\right)^\alpha} du \right), \quad n \to \infty.$$

თავის მხრივ,

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{du}{\left(ln\frac{1}{|u|}\right)^\alpha} = -\int_{+\infty}^{u} \frac{dt}{(lnt)^\alpha \cdot t^2} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \cdot (lnt)^\alpha} \le \frac{1}{(lnn)^\alpha} \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2} = \frac{1}{n(lnn)^\alpha}\,. \qquad (11)$$

უკანასკნელიდან და (3) შეფასებიდან მივიღებთ :

$$n \cdot \widetilde{m}_x\left(\frac{1}{n}, q\right) ln\frac{n}{\Phi(n)} = o\left(\frac{1}{n(lnn)^\alpha} \cdot ln\frac{n}{\Phi(n)}\right) = o(1).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ სრულდება თეორემა 1-ის (2) პირობა. ამის გარდა, (2)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\int_0^t \Psi_x(\tau)d\tau = o(t), \quad t \to 0.$$

რადგან თეორემა 1-ის ორივე პირობა სრულდება, ამიტომ მივიღებთ, რომ

$$\tilde{S}_n(x, f) - \tilde{f}(x, \tfrac{\pi}{n}) \to o(1), \qquad n \to \infty.$$

შედეგი 1.2 ვთქვათ, $f(t)\epsilon L(0; 2\pi)$ და

$$a_n = o\left(\frac{e^{(lnlnn)^\alpha}}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{e^{(lnlnn)^\alpha}}{n}\right), \quad (\alpha \ge 1) \qquad (12)$$

და x წერტილში სრულდება პირობა

$$f(x+t)-f(x)= o\left(\frac{1}{\left(lnln\frac{1}{|t|}\right)^{\alpha}}\right), \quad t\to 0. \tag{13}$$

მაშინ

$$\tilde{S}_n(x,f)-\tilde{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)\to o(1), \qquad n\to\infty.$$

დამტკიცება. (12) შეფასებიდან მივიღებთ

$$\left|\int_a^b f(x+t)cosntdt\right|\le c\sum_{\substack{k=1\\ n\neq k}}^{\infty}\frac{e^{(lnlnk)^{\alpha}}}{k|n-k|}.$$

მართლაც,

$$f(t)\sim\frac{a_o}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k coskt+b_k sinkt\ ,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)cosktdt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)cosk(\tau-x)d\tau=cosnx\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)cosk\tau d\tau=$$
$$=\quad -\frac{sinnx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)sink\tau d\tau=cosnxa_n-sinnxb_n\ ;$$

$$\int_a^b f(x+t)cosntdt=$$
$$\frac{a_o}{2}\int_a^b cosntdt+cosnx\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b cosntcoskta_k--sinnx\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b cosntsinkt\cdot b_k\ ;$$

$$\int_a^b cosntdt=-\frac{sinnt}{n}\Big|_a^b;$$

$$\left|\int_a^b f(x+t)cosntdt\right|\le\frac{c}{n}+\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(n-k)\,tdt\right|+\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\cos(n+k)\,tdt\right|+$$
$$+\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_a^b\sin(n-k)\,tdt\right|+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_a^b\sin(n+x)\,tdt\le\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{c}{|n-k|}+\frac{c}{n}\le$$
$$\le\quad C\sum_{\substack{k=1\\ n\neq k}}^{\infty}\frac{e^{(lnlnk)^{\alpha}}}{k|n-k|}\ .$$

შევაფასოთ სამი ჯამი. პირველი -

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{e^{(lnlnk)^{\alpha}}}{k(n-k)}\leq c\frac{e^{(lnlnn)^{\alpha}}}{n}lnn;$$

მეორე -

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{2n}\frac{e^{(lnlnk)^{\alpha}}}{k|n-k|}\leq\frac{4}{n}\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{2n}\frac{e^{(lnlnk)^{\alpha}}}{|n-k|}=\frac{4}{n}\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1}\frac{e^{(lnlnk)^{\alpha}}}{|n-k|}+$$

$$+\frac{4}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{e^{(lnlnk)^{\alpha}}}{|n-k|}\leq\quad\frac{C}{n}e^{(lnlnk)^{\alpha}}\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1}\frac{1}{|n-k|}+$$

$$+\frac{c}{n}e^{(lnlnn)^{\alpha}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{|n-k|}\leq\frac{c}{n}e^{(lnlnn)^{\alpha}}\sum_{m=1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]-1}\frac{1}{m}=\quad\frac{C}{n}e^{(lnlnn)^{\alpha}}lnn;$$

მესამე -

$$\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{e^{(lnlnk)^{\alpha}}}{k(n-k)}\leq 2\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{e^{(lnlnk)^{\alpha}}}{k^{2}}\leq c\int_{n}^{\infty}\frac{e^{(lnlnx)^{\alpha}}}{x^{2}}dx\leq$$

$$\leq\quad C\int_{n}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(-\frac{e^{(lnlnx)^{\alpha}}}{x}lnx\right)dx=c\frac{e^{(lnlnn)^{\alpha}}}{n}lnn.$$

მიღებული შეფარდებიდან მივიღბთ, რომ

$$\sup_{\substack{x\in[0;2\pi]\\|b-a|\leq 2\pi}}\left|\int_{a}^{b}f(x+t)cosntdt\right|\leq c\frac{e^{(lnlnn)^{\alpha}}}{n}lnn$$

ხოლო $\Phi(n)$ –ის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს

$$c\frac{n}{e^{(lnlnn)^{\alpha}}lnn}\leq\ \Phi(n)\leq n \tag{14}$$

მართლაც,

$$\Phi(n)=\min\left\{n,\ \begin{matrix} inf \\ x\in[0,2\pi] \\ |b-a|\le 2\pi \end{matrix}\ \frac{\int_0^{2\pi}|f(t)|dt}{\int_a^b f(x+t)\cos ntdt}\right\}= \qquad \text{(n=1, 2, 3, ...).}$$

$$=\min\left\{n,\frac{\int_0^{2\pi}|f(t)|dt}{\begin{matrix} sup \\ x\in[0,2\pi] \\ |b-a|\le 2\pi \end{matrix}\ \int_a^b f(x+t)\cos ntdt}\right\}\ge \min\left\{n,c\frac{e^{(lnlnn)^{\alpha}}lnn}{n}\right\}=c\frac{e^{(lnlnn)^{\alpha}}lnn}{n}$$

ვთქვათ, $q(n)=lnn$. მაშინ (13), (14)-დან მივიღებთ :

$$\widetilde{m_x}\left(\frac{1}{n},q\right)=\begin{matrix} sup \\ 0\le h\le\frac{1}{n}\end{matrix}\begin{matrix} sup \\ 0\le t\le\frac{lnn}{\Phi(n)}\end{matrix}=\frac{1}{2}\left|\int_0^h[f(x+\tau+h)-f(x-\tau-h)+f(x+\tau-h)-\right.$$

$$\left.-f(x-\tau+h)-2f(x+\tau)+2f(x-\tau)]d\tau\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2}\begin{matrix} sup \\ 0\le h\le\frac{1}{n}\end{matrix}\ \begin{matrix} sup \\ 0\le t\le\frac{lnn}{\Phi(n)}\end{matrix}\int_a^b[|f(x+\tau+h)-f(x+\tau)|+|f(x-\tau)-f(x-\tau-h)|+$$

$$+|f(x_n+\tau-h)-f(x_n-\tau)|+|f(x_n-\tau)-f(x_n-\tau+h)|d\tau]=$$

$$=o\left(\begin{matrix} sup \\ 0\le h\le\frac{1}{n}\end{matrix}\int_0^h\frac{1}{\left(lnln\frac{1}{|u|}\right)^{\alpha}}du\right),\quad n\to\infty.$$

თავის მხრივ,

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{du}{\left(lnln\frac{1}{|u|}\right)^{\alpha}}=-\int_{+\infty}^{u}\frac{dt}{(lnlnt)^{\alpha}\cdot t^2}=\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^2\cdot(lnlnt)^{\alpha}}\le\frac{1}{(lnlnn)^{\alpha}}\int_n^{+\infty}\frac{1}{t^2}=\frac{1}{n(lnlnn)^{\alpha}} \qquad (15)$$

უკანასკნელიდან და (3) შეფასებიდან მივიღებთ :

$$n \cdot \widetilde{m}_x\left(\frac{1}{n}, q\right) ln\frac{n}{\Phi(n)} = o\left(\frac{1}{n(lnlnn)^{\alpha}} \cdot ln\frac{n}{\Phi(n)}\right) = o(1).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ სრულდება თეორემა 1-ის (2) პირობა. ამის გარდა, (13)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\int_0^t \Psi_x(\tau)d\tau = o(t), \quad t \to 0.$$

რადგან თეორემა 1-ის ორივე პირობა სრულდება, ამიტომ მივიღებთ, რომ

$$\tilde{S}_n(x,f) - \tilde{f}(x,\frac{\pi}{n}) \to o(1), \qquad n \to \infty.$$

შედეგი 3.1. თუ ფუნქცია $f \epsilon L(0;2\pi)$ და

$$f(t) - f'(t) = o\left(\frac{1}{ln\frac{1}{|t-t'|}}\right), \qquad t,\ t' \to x, \qquad (16)$$

მაშინ x წერტილში $\widetilde{s_n}(x,f) - \tilde{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right) = o(1), \qquad n \to \infty.$

დამტკიცება. ვთქვათ $q(n) = ln\Phi(n)$. მაშინ ნებისმიერი (x_n) მიმდევრობისთვის, რომლისთვისაც $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $m_x(\delta,q)$-ისა და $\Psi_{x_n}(t)$-ის განსაზღვრებებიდან გამომდინარეობს :

$$m_{x_n}(\delta,q) = \sup_{0 \le h \le \frac{1}{n}} \sup_{0 \le t \le \frac{ln\Phi(n)}{\Phi(n)}} \left|\int_0^h\left[\Psi_{x_n}(\tau+h) + \Psi_{x_n}(\tau-h) - 2\Psi_{x_n}(\tau)\right]d\tau\right| =$$

$$= \sup_{0 \le h \le \frac{1}{n}} \sup_{0 \le t \le \frac{ln\Phi(n)}{\Phi(n)}} = \frac{1}{2}\left|\int_0^h [f(x_n+\tau+h) - f(x_n-\tau-h) + f(x_n+\tau-h) -\right.$$

$$\left. -f(x_n-\tau+h) - 2f(x_n+\tau) + 2f(x_n-\tau)]d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2} \sup_{0 \le h \le \frac{1}{n}} \sup_{0 \le t \le \frac{ln\Phi(n)}{\Phi(n)}} \int_0^h |f(x_n+\tau+h) - f(x_n+\tau) - f(x_n-\tau-h) + f(x_n-\tau) +$$

$$+f(x_n+\tau-h) - f(x_n-\tau) - f(x_n-\tau+h) + f(x_n-\tau)|d\tau \ \le$$

$$\le \frac{1}{2} \sup_{0 \le h \le \frac{1}{n}} \sup_{0 \le t \le \frac{ln\Phi(n)}{\Phi(n)}} \int_0^h [|f(x_n+\tau+h) - f(x_n+\tau)| + |f(x_n-\tau) - f(x_n-\tau-$$

$$-h)| + |f(x_n+\tau-h) - f(x_n-\tau)| + |f(x_n-\tau) - f(x_n-\tau+h)|d\tau]$$

თუ გამოვიყენებთ (16) პირობას, მივიღებთ :

$$m_{x_n}\left(\frac{1}{n}, q\right) = o\left(\sup_{0 \le h \le \frac{1}{n}} \int_0^h \frac{du}{ln\frac{1}{u}}\right), \quad n \to \infty$$

მეორე მხრივ :

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{du}{ln\frac{1}{u}} = -\int_{+\infty}^{u} \frac{dt}{lnt \cdot t^2} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \cdot lnt} \le \frac{1}{lnn}\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{lnn} \cdot \left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_n^{+\infty} = \frac{1}{n \cdot lnn}$$

ამიტომ ,

$$n \cdot m_{x_n}\left(\frac{1}{n}, q\right) ln\frac{n}{\Phi(n)} = o\left(\frac{1}{lnn} \cdot ln\frac{n}{\Phi(n)}\right) = o\ (1)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ სრულდება თეორემა 3-ის (8) პირობა. ამის გარდა, (16)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ :

$$\sup_{\tau \in [-\tau_n;\ \tau_n]} |f(x_n+\tau) - f(x_n)| = o\left(\frac{1}{ln\frac{1}{\tau}}\right) \quad \to 0,\ \ n \to \infty$$

რადგან თეორემა 2-ის ორივე პირობა სრულდება, ამიტომ, მივიღეთ, რომ x წერტილში თანაბრად $\widetilde{s_n}(x,f) - \tilde{f}\left(x, \frac{\pi}{n}\right) = o(1)$, $\qquad n \to \infty$.

თეორემა 3.2. ვთქვათ, $f(t)\epsilon L(0; 2\pi)$ და ამისთვის სრულდება პირობები :

$$f(t)-f'(t)=o\left(\frac{1}{lnln\frac{1}{|t-t'|}}\right), \qquad t,\ \ t'\to x, \qquad (17)$$

$$a_n=O\left(\frac{(lnn)^{\alpha}}{n}\right),\ \ b_n=O\left(\frac{(lnn)^{\alpha}}{n}\right),\ \ (d\geq 0), \qquad (18)$$

მაშინ x წერტილში $\widetilde{s_n}(x,f)-\tilde{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)$ თანაბრად კრებადია 0-კენ, როცა $n\to\infty$.

დამტკიცება. ვთქვათ $q(n)=ln\Phi(n)$. მაშინ ნებისმიერი (x_n) მიმდევრობისთვის, რომლისთვისაც $\lim_{n\to\infty}x_n=x$, ($m_x(\delta,q)$-ისა და $\Psi_{x_n}(t)$-ის განსაზღვრებებიდან გამომდინარე), გვაქვს :

$$\widetilde{m_{x_n}}(\delta,q)=\sup_{0\leq h\leq\frac{1}{n}}\ \sup_{0\leq t\leq\frac{ln\Phi(n)}{\Phi(n)}}\left|\int_0^h\left[\Psi_{x_n}(\tau+h)+\Psi_{x_n}(\tau-h)-2\Psi_{x_n}(\tau)\right]d\tau\right|=$$

$$=\sup_{0\leq h\leq\frac{1}{n}}\ \sup_{0\leq t\leq\frac{ln\Phi(n)}{\Phi(n)}}=\frac{1}{2}\Big|\int_0^h[f(x_n+\tau+h)-f(x_n-\tau-h)+f(x_n+\tau-h)-$$

$$-f(x_n-\tau+h)-2f(x_n+\tau)+2f(x_n-\tau)]d\tau\Big|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\sup_{0\leq h\leq\frac{1}{n}}\ \sup_{0\leq t\leq\frac{ln\Phi(n)}{\Phi(n)}}\int_0^h[|f(x_n+\tau+h)-f(x_n+\tau)|+|f(x_n-\tau)-f(x_n-\tau-$$

$$-h)|+|f(x_n+\tau-h)-f(x_n-\tau)|+|f(x_n-\tau)-f(x_n-\tau+h)|d\tau].$$

თუ გამოვიყენებთ (17)-ს, მივიღებთ :

$$m_{x_n}\left(\frac{1}{n},q\right)=o(\sup_{0\leq h\leq\frac{1}{n}}\int_0^h\frac{du}{lnln\frac{1}{u}}), \qquad n\to\infty\,.$$

თავის მხრივ :

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{du}{lnln\frac{1}{u}}=-\int_{+\infty}^{u}\frac{dt}{lnlnt\cdot t^2}==\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^2\cdot lnlnt}\leq\frac{1}{lnlnn}\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{lnlnn}\cdot(-\frac{1}{t})\Big|_n^{+\infty}=\frac{1}{n\cdot lnlnn}.$$

უკანასკნელიდან გამომდინარე მივიღებთ :

$$\widetilde{m_{x_n}}\left(\frac{1}{n}, q\right) = o\left(\frac{1}{nlnlnn}\right), \text{ ანუ} \tag{19}$$

$$n \cdot m_{x_n}\left(\frac{1}{n}, q\right) \; lnlnn = o(1), \qquad n \to \infty$$

(18)-დან ვიღებთ შეფასებას

$$C \; \frac{n}{(lnn)^{\alpha+1}} \leq \; \Phi(n) \leq n \tag{20}$$

(19)-დან და (20)-დან გამომდინარეობს, რომ სრულდება თეორემა 3-ის (8) პირობა. მართლაც,

$$n \cdot \widetilde{m_x}\left(\frac{1}{n}, q\right) ln\frac{n}{\Phi(n)} = o\left(\frac{1}{lnlnn} \cdot ln\frac{n}{\Phi(n)}\right) = \left(\frac{1}{lnlnn} \cdot ln\frac{n}{\Phi(n)}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{lnlnn} \cdot \ln(c(lnn)^{\alpha+1}\right) = o(1)$$

თეორემა 2-ის 7 პირობა გამომდინარეობს 1-დან. მართლაც,

$$\sup_{\tau \in [-\tau_n;\; \tau_n]} |f(x_n + \tau) - f(x_n)| = o\left(\frac{1}{lnln\frac{1}{\tau}}\right) \quad \to 0, \;\; n \to \infty$$

მივიღეთ, რომ სრულდება თეორემა 2-ის ორივე პირობა, ამიტომ x წერტილში $\widetilde{s_n}(x, f) - \tilde{f}\left(x, \frac{\pi}{n}\right) \to 0$ თანაბრად, როცა $n \to \infty$.

თეორემა 3.3. (სატოს თეორემა). ვთქვათ, $f(t) \epsilon L(0; 2\pi)$ და x წერტილში სრულდება პირობა :

$$f(t) - f'(t) = o\left(\frac{1}{lnln\frac{1}{|t - t'|}}\right), \qquad t, \;\; t' \to x,$$

და

$$a_n = O\left(\frac{(lnlnn)^{\alpha}}{n}\right),\ \ b_n = O\left(\frac{(lnlnn)^{\alpha}}{n}\right),\ \ (d > 1),$$

მაშინ x წერტილში $\widetilde{s_n}(x,f) - \tilde{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right)$ თანაბრად კრებადია 0-კენ, როცა $n \to \infty$.

ამ თეორემის მტკიცება თეორემა B-ს მტკიცების ანალოგიურია, ამიტომ მას აქ არ განვიხილავთ. C-თი აღვნიშნავთ აბსოლუტურ მუდმივებს, რომლების საზოგადოდ სხვადასხვაა.

§ 4. ძირითადი დებულებების დამტკიცება

თეორემა 1-ის დამტკიცება.

$$\tilde{s}_n(x,f) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Psi_x(t)\widetilde{D_n^*}(t)dt = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\Psi_x(t)}{2tg\frac{1}{2}t}(1-cosnt)dt$$

$$\tilde{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right) = -\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2tg\,\frac{t}{2}}dt$$

$$\mathrm{I}_n = \tilde{s}_n(x,f) - \ \tilde{f}\left(x,\frac{\pi}{n}\right) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\Psi_x(t)}{2tg\frac{1}{2}t}(1-cosnt)dt + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{\Psi_x(t)}{2tg\frac{1}{2}t}(1-cosnt)dt =$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{\Psi_x(t)}{2tg\frac{1}{2}t}(1-cosnt)dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\Psi_x(t)}{2tg\frac{1}{2}t}(1-cosnt)dt + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{\Psi_x(t)}{2tg\frac{1}{2}t}(1-cosnt)dt =$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{\Psi_x(t)}{2tg\frac{1}{2}t}cosntdt - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\Psi_x(t)}{2tg\frac{1}{2}t}(1-cosnt)dt = A_1 - A_2 = \mathrm{I}_n$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\Psi_x(t)}{2tg\frac{1}{2}t}(1-cosnt)dt\frac{2}{x}\frac{1-cosnt}{2tg\frac{1}{2}t}\int_0^t\Psi_x(\tau)d\tau\Big|_0^{\frac{\pi}{n}} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\left(\frac{1-cosnt}{2tg\frac{1}{2}t}\right)'\int_0^t\Psi_x(\tau)d\tau dt =$$

$$= A_3 - A_4$$

$$A_3 = \frac{2}{\pi}\frac{2sin^2\frac{nt}{2}}{2tg\,\frac{1}{2}\,t}\int_0^t\Psi_x(\tau)d\tau\Big|_0^{\frac{\pi}{n}} = \ |A_3| \le \left|\frac{4}{\pi}\frac{1}{2tg\,\frac{1}{2}\frac{\pi}{n}}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\Psi_x(\tau)d\tau\right| = \frac{4}{\pi}\frac{1}{\frac{\pi}{n}}\ o\left(\frac{\pi}{n}\right) = o(1)$$

$$|A_4| = \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{n\, sinnt \cdot 2tg\frac{1}{2}t - (1-cosnt)\frac{1}{cos^2\frac{1}{2}t}}{4tg^2\frac{1}{2}t} \int_0^t \Psi_x(\tau)d\tau dt \right| =$$

$$= \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{n\, sinnt}{2tg\frac{1}{2}t} \int_0^t \Psi_x(\tau)d\tau dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{2sin^2\frac{nt}{2}\frac{1}{cos^2\frac{1}{2}t}}{4tg^2\frac{1}{2}t} \int_0^t \Psi_x(\tau)d\tau dt \right| =$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{n}{t} \cdot o(t)dt + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{nt \cdot \frac{1}{2}}{t^2}\ o(t) = o(1) + o(1) = o(1)$$

ამრიგად, $A_2 = o(1)$. შევაფასოთ

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\Psi_x(t)}{2tg\frac{1}{2}t} cosntdt.\ \ A_1 = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\Psi_x(t)}{t} cosntdt + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \Psi_x(t)\left[\frac{1}{2tg\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right] cosntdt$$

რადგან $\frac{1}{2tg\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}$ არის სასრული ვარიაციის ფუნქცია, ამიტომ A_1-ის უკანასკნელი შესაკრები→0-ისაკენ.(მისწრაფება თანაბარია)

შესაფასებელი დაგვრჩა:

$$B_1 = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \Psi_x(t)\frac{cosnt}{t}dt = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} = B_2 + B_1^{(1)}$$

$B_1^{(1)} =$

$$\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \Psi_x(t)\frac{cosnt}{t}dt = \frac{2}{\pi}\frac{cosnt}{t}\int_0^t \Psi_x(\tau)d\tau \Big|_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{cosnt}{t}\right)' \int_0^t \Psi_x(\tau)d\tau dt = \frac{2}{\pi}\frac{cos2\pi}{\frac{2\pi}{n}}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \Psi_x(\tau)d\tau - \frac{2}{\pi}\frac{cos\pi}{\frac{\pi}{n}}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \Psi_x(\tau)d\tau -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}\frac{-n\,sinnt\cdot t-cosnt}{t^2}\int_0^t\Psi_x(\tau)d\tau dt=o(1)-o(1)+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}\frac{n\,sinnt}{t}\int_0^t\Psi_x(\tau)d\tau dt+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}\frac{cosnt}{t^2}\int_0^t\Psi_x(\tau)d\tau dt=o(1)+o(1)\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}n\,sinntdt+\frac{2}{\pi}o(1)\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}\frac{1}{t}dt=o(1)$$

ამიტომ საკმარისია შევაფასოთ

$$B_2=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi}\Psi_x(\tau)\frac{cosnt}{t}dt. \tag{21}$$

სამართლიანია შემდეგი

$$\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\pi}\Psi_x(\tau)\frac{cosnt}{t}dt=-\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}}\Psi_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\frac{cosnt}{t+\frac{\pi}{n}}dt=-\int_{\frac{3\pi}{n}}^{\pi+\frac{\pi}{n}}\Psi_x\left(t-\frac{\pi}{n}\right)\frac{cosnt}{t-\frac{\pi}{n}}dt\,; \tag{22}$$

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}\Psi_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\frac{cosnt}{t+\frac{\pi}{n}}dt=\frac{cosnt}{t+\frac{\pi}{n}}\int_0^t\Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)d\tau\Big|_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}-\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}\left(\frac{cosnt}{t+\frac{\pi}{n}}\right)'\int_0^t\Psi_x\Big(\tau+$$

$$+\frac{\pi}{n}\Big)d\tau dt=\frac{cosnt}{t+\frac{\pi}{n}}\int_{\frac{\pi}{n}}^{t+\frac{\pi}{n}}\Psi_x(\tau)d\tau\Big|_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}-$$

$$-\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}\frac{-n\,sinnt\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)-cosnt}{\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)^2}\int_{\frac{\pi}{n}}^{t+\frac{\pi}{n}}\Psi_x(\tau)d\tau dt=\frac{cosnt}{t+\frac{\pi}{n}}\Big[\int_0^{t+\frac{\pi}{n}}\Psi_x(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{n}}\Psi_x(\tau)d\tau\Big]_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}}+$$

$$+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \frac{n\, sinnt\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)+cosnt}{\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)^2} o\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)dt = \frac{cos2\pi}{\frac{3\pi}{n}}\left[\int_0^{\frac{3\pi}{n}} \Psi_x(\tau)d\tau - \int_0^{\frac{\pi}{n}} \Psi_x(\tau)d\tau\right] -$$

$$-\frac{cos\pi}{\frac{2\pi}{n}}\left[\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \Psi_x(\tau)d\tau - \int_0^{\frac{\pi}{n}} \Psi_x(\tau)d\tau\right] + n\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \frac{sinnt}{\tau+\frac{\pi}{n}} o\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)dt + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \frac{cosnt}{\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)^2} o\left(\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{n}\right)dt = o(1),$$

ე. ი.

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} \Psi_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\frac{cosnt}{t+\frac{\pi}{n}}dt = o(1).$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\frac{3\pi}{n}} \Psi_x\left(t-\frac{\pi}{n}\right)\frac{cosnt}{t+\frac{\pi}{n}}dt = o(1).$$

ავიღოთ ისეთი $q^*(n)$, რომ

$$q^*(n) \le q(n), \qquad q^*(n) \to \infty, \frac{q^*(n)}{\Phi(n)} \equiv \alpha_n \to 0;$$

$$n \cdot \widetilde{m}_x\left(\frac{1}{n}, q^*\right) lnq^*(n) = o(1), \qquad \text{როცა} \quad n \to \infty,$$

თეორემის თანახმად ასეთი $q^*(n)$ არსებობს. საშუალო მნიშვნელობის II თეორემის თანახმად

$$\left|\int_{\alpha_n}^{\pi-\frac{\pi}{n}} \Psi_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\frac{cosnt}{t+\frac{\pi}{n}}dt\right| \le C_2\frac{1}{q^*(n)} = o(1)$$

და

$$\left|\int_{\alpha_n}^{\pi} \Psi_x(t)\frac{cosnt}{t}dt\right| \le C_3\frac{1}{q^*(n)} = o(1)$$

(21), (22), (23) და (24)-ის ძალით.

$$I_n = -\frac{1}{4\pi}\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\left\{\frac{\Psi_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}{t+\frac{\pi}{n}}+\frac{\Psi_x\left(t-\frac{\pi}{n}\right)}{t-\frac{\pi}{n}}-2\frac{\Psi_x(t)}{t}\right\}cosntdt+o(1) \qquad (24')$$

$$\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\frac{\Psi_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}{t+\frac{\pi}{n}}\,cosntdt =$$

$$=\frac{cosnt}{t+\frac{\pi}{n}}\int_0^t\Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)d\tau\Big|_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}+$$

$$+\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\left\{\frac{n\,sinnt}{t+\frac{\pi}{n}}+\frac{cosnt}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)^2}\right\}\int_0^t\Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)d\tau dt=$$

$$=\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\left\{\frac{n\,sinnt}{t+\frac{\pi}{n}}+\frac{cosnt}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)^2}\right\}\int_0^t\Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)d\tau dt+o(1). \qquad (25)$$

მაგრამ

$$\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\left\{\frac{cosnt}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)^2}-\frac{cosnt}{t^2}\right\}\int_0^t\Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)d\tau dt=\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\frac{cosnt\left[t^2-\left(t+\frac{\pi}{n}\right)^2\right]}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)^2t^2}\,o\left(t+\frac{\pi}{n}\right)dt=$$

$$=o\left\{\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\frac{\frac{t}{n}+\frac{1}{n^2}}{t^3}dt\right\}=o\left(\frac{1}{n}\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\frac{1}{t^2}+\frac{1}{n^2}\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\frac{dt}{t^3}\right)=o(1).$$

ამრიგად, უკანასკნელის თანახმად (25)-დან გვაქვს :

$$\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{\Psi_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}{t+\frac{\pi}{n}} cosntdt = \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \left\{\frac{n\ sinnt}{t+\frac{\pi}{n}} + \frac{cosnt}{t^2}\right\} \int_0^t \Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right) d\tau dt + o(1). \qquad (26)$$

ანალოგიურად, $(24'), (25), (26), (27)$ და $(28) -$ის ძალით

$$\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{\Psi_x\left(t-\frac{\pi}{n}\right)}{t-\frac{\pi}{n}} cosntdt = \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \left\{\frac{n\ sinnt}{t-\frac{\pi}{n}} + \frac{cosnt}{t^2}\right\} \int_0^t \Psi_x\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right) d\tau dt + o(1); \qquad (27)$$

$$\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{\Psi_x(t)}{t} cosntdt = \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \left\{\frac{n\ sinnt}{t} + \frac{cosnt}{t^2}\right\} \int_0^t \Psi_x(\tau) d\tau dt + o(1)\,. \qquad (28)$$

$$\mathrm{I}_n = -\frac{1}{4\pi}\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \left\{\frac{cosnt}{t^2}\int_0^t \left[\Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right) + \Psi_x\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right) \quad -2\Psi_x(\tau)\right] d\tau - \frac{n\ sinnt}{t+\frac{\pi}{n}}\int_0^t \Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right) d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{n\ sinnt}{t-\frac{\pi}{n}}\int_0^t \Psi_x\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right) d\tau - 2\frac{n\ cosnt}{t}\int_0^t \Psi_x(\tau)d\tau\right\} dt + o(1).$$

თუ $t \in \left[0; \frac{q(n)}{\Phi(n)}\right]$, მაშინ,

$$\left|\int_0^t \left[\Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right) + \Psi_x\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right) - 2\Psi_x(\tau)\right] d\tau\right| \le \widetilde{m}_x\left(\frac{\pi}{n}, q\right)$$

ამრიგად, თეორემის პირობის თანახმად,

$$\left|\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{cosnt}{t^2}\int_0^t \left[\Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right) + \Psi_x\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right) - 2\Psi_x(\tau)\right] d\tau dt\right| \le \widetilde{m}_x\left(\frac{\pi}{n}, q\right)\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{dt}{t^2} \le n\widetilde{m}_x\left(\frac{\pi}{n}, q\right) =$$

$$= o(1)$$

უკანასკნელი შეფასების ძალით,

$$\mathrm{I}_n = -\frac{1}{4\pi}\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\left\{\frac{n\,sinnt}{t+\frac{\pi}{n}}\int_0^t \Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)d\tau + \frac{n\,sinnt}{t-\frac{\pi}{n}}\int_0^t \Psi_x\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right)d\tau - 2\frac{n\,sinnt}{t}\int_0^t \Psi_x(\tau)d\tau\right\}dt +$$

$$+o(1) \tag{29}$$

განვიხილოთ

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\left\{n\left(\frac{1}{t+\frac{\pi}{n}}-\frac{1}{t}\right)sinnt\int_0^t \Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)d\tau + n\left(\frac{1}{t-\frac{\pi}{n}}-\frac{1}{t}\right)sinnt\int_0^t \Psi_x\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right)d\tau\right\}dt =$$

$$= -\pi\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\frac{sinnt}{t\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}\int_0^t \Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)d\tau dt + \pi\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\frac{sinnt}{t\left(t-\frac{\pi}{n}\right)}\int_0^t \Psi_x\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right)d\tau dt.$$

თუ უკანასკნელ ინტეგრალში მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას, გვექნება :

$$A_n = -\pi\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\frac{sinnt}{t\left(t+\frac{\pi}{n}\right)}\int_0^t \Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)d\tau dt + \pi\int_0^{\alpha_n-\frac{2\pi}{n}}\frac{sinnt}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)}\int_0^{t+\frac{2\pi}{n}} \Psi_x\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right)d\tau dt =$$

$$= -A_n^{(1)} + A_n^{(2)}. \tag{30}$$

შევაფასოთ ინტეგრალები (გამოყენებული იქნება თეორემის პირველი პირობა)

$$\int_{\alpha_n-\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\frac{sinnt}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)}\int_0^{t+\frac{2\pi}{n}} \Psi_x\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right)d\tau dt = \int_{\alpha_n-\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\frac{sinnt}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{t+\frac{\pi}{n}} \Psi_x(\tau)d\tau dt =$$

$$= \int_{\alpha_n-\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\frac{sinnt}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)}\; o\left(\,t+\frac{\pi}{n}\right) = o\left(\int_{\alpha_n-\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\frac{dt}{t+\frac{2\pi}{n}}\right) = o\left(\frac{2\pi}{n\;\alpha_n}\right) = o(1), \tag{31}$$

და

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n}}\frac{sinnt}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)}\int_0^{t+\frac{2\pi}{n}} \Psi_x\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right)d\tau dt = \int_0^{\frac{2\pi}{n}}\frac{sinnt}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)}\,o\left(t+\frac{\pi}{n}\right) = o\left(\frac{n}{2\pi}\frac{2\pi}{n}\right) =$$

$$= o(1) \tag{32}$$

(30) , (31) და (32) – დან გვაქვს :

$$A_n^{(2)} = \pi\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n}\frac{sinnt}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)}\int_0^{t+\frac{2\pi}{n}} \Psi_x\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right)d\tau dt + o(1) \tag{33}$$

შევაფასოთ ინტეგრალი :

$$\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{sinnt}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \Psi_x\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right) d\tau dt = \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{sinnt}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)} o\left(\frac{\pi}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{dt}{t^2}\right) =$$

$$= o\left\{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{n}{2\pi}\right)\right\} = o(1) \qquad (34)$$

ამრიგად, თუ გავითვალისწინებთ (30), (33) და (34)-ს, გექნება :

$$A_n = -\pi \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{sinnt}{t\left(t+\frac{\pi}{n}\right)} \int_0^t \Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right) d\tau dt + \pi \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{sinnt}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)} \int_{\frac{2\pi}{n}}^{t+\frac{2\pi}{n}} \Psi_x\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right) d\tau dt +$$

$$+o(1) = -\pi \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{sinnt}{t\left(t+\frac{\pi}{n}\right)} \int_0^t \Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right) d\tau dt + \pi \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{sinnt}{\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)} \int_0^t \Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right) d\tau dt +$$

$$+o(1) = \frac{2\pi^2}{n} \int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{sinnt}{t\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)} \int_0^t \Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right) d\tau dt + o(1) = o\left(\frac{1}{n}\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{dt}{t\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)}\right) =$$

$$= o\left(\frac{1}{n}\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{dt}{t^2}\right) \qquad (35)$$

(29) და (35) ტოლობები გვაძლევენ :

$$\mathrm{I}_n = -\frac{1}{4\pi}\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{n\, sinnt}{t}\int_0^t \left[\Psi_x\left(\tau+\frac{\pi}{n}\right)+\Psi_x\left(\tau-\frac{\pi}{n}\right)-2\Psi_x(\tau)\right] d\tau dt + o(1).$$

თუ $q^*(n)$-ს შევარჩევთ ისე, რომ მან დააკმაყოფილოს თეორემის მეორე პირობა,

გვექნება :

$$|\mathrm{I}_n| \le \widetilde{m}_x\left(\frac{\pi}{n},q^*\right)\cdot n \cdot \left|\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\alpha_n} \frac{dt}{t}\right| = o\left[\widetilde{m}_x\left(\frac{1}{n},q\right) n \cdot \left(ln\alpha_n - ln\frac{2\pi}{n}\right)\right] =$$

$$= o\left[n\widetilde{m}_x\left(\frac{1}{n},q\right)\cdot. ln\frac{q^*(n)n}{\Phi(n)}\right] = o\left[n\widetilde{m}_x\left(\frac{1}{n},q\right)\cdot ln\frac{n}{\Phi(n)}\right] + o\left[nm_x\left(\frac{1}{n},q\right)\cdot lnq^*(n)\right] =$$

$$= \quad o(1).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2-ის დამტკიცება. დამტკიცება გამომდინარეობს თეორემა 1-ის ანალოგიურად, თუ x წერტილის მაგივრად განვიხილავთ მისკენ კრებად (x_n) მიმდევრობას.

თეორემა 3-ის დამტკიცება. თეორემა 2-დან გამომდინარეობს, რომ $t \in \left[0, \frac{q(n)}{\Phi(n)}\right]$- თვის

$$\int_0^t \{f(x_n+u) - f(x_n-u)\}du = o(t), \quad t \to 0, \quad n \to \infty. \tag{36}$$

ამრიგად, თუ თეორემა 1-ის (1) და (2) პირობებს შევცვლით (36) და (8) პირობებით, მივიღებთ, რომ ნებისმიერი (x_n) მიმდევრობისათვის, რომლისთვისაც $\lim_{n\to\infty} x_n = x$,

$$\tilde{S}_n(x_n, f) - \tilde{f}(x_n, \frac{\pi}{n}) \to o(1), \qquad n \to \infty,$$

სადაც $o(1)$ არ არის დამოკიდებული (x_n) მიმდევრობის შერჩევაზე. მაშინ

$$\left|\tilde{S}_n(x_n, f) - \tilde{f}(x, \frac{\pi}{n})\right| = \left|\tilde{f}\left(x_n, \frac{\pi}{n}\right) - \tilde{f}(x, \frac{\pi}{n})\right| + o(1), \quad n \to \infty.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ x წერტილში $\tilde{S}_n(x, f) - \tilde{f}\left(x, \frac{\pi}{n}\right)$ თანაბრად კრებადია 0-კენ როცა $n \to \infty$.

§5. ლიტერატურა

[1] Бари Н.К., Тригонометрические ряды. Физматгиз (Москва), 1961.

[2] Fatou P., Séries trigonométriques et séries de Teylor. Acta Mathematica (Uppsala), 30 (1906), 335-400.

[3] Palay R., On Fourier series with positive coefficients. Journal of the London Math. Soc., 7(1932), 205-208.

[4] Szàsz O., Zur Konvergenztheorie der Fourierschen Reihen. Acta Mathematika (Uppsala), 61 (1933), 185-201.

[5] Зигмунд А., ., Тригонометрические ряды,т. I (Москва,1965).

[6] Lebesgue H., Sur la représentation trigonométrique apprichée des fonctions ça tisfa i'sant à une condition de Lipschitz, Bulletin de la Soc. Math. de France, 38(1910),184-210.

[7] Salem R. Essais sur les séries trigonometriques. Actualité Sci. et Industr., 862 (Paris, 1940).

[8] Nash J., Uniform convergence of Fourier series, Rice Inst. Pamphlet (1953), 31-57.

[9] Sato M., Uniform convergence of Fourier series, Proc. Japan Acad., 30 (1954), 528-531.

[10] Захаров А. А.,Сходимасть и равномерная сходимасть рядов Фурье, Изв. АН СССР. Сер. матем.,1971, том 35, выпуск 2, 367-380.