

ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო  
უნივერსიტეტი

მარიამ თათიკიშვილი

არსად მარტივი სიმრავლეების შესახებ

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის  
მათემატიკის დეპარტამენტი

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის მაგისტრის აკადემიური  
ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი: ფიზიკა-მათემატიკის  
მეცნიერებათა დოქტორი, თსუ-ს სრული  
პროფესორი როლანდ ომანაძე

თბილისი, 2016

## ანოტაცია

ნაშრომი ეძღვნება არსად მარტივ სიმრავლეთა კლასის შესწავლას. აღნიშნულ სიმრავლეთა ცნება გასული საუკუნის 70-იან წლებში რ. შორმა შემოიტანა. ეს კლასი აღმოჩნდა მეტად საინტერესო თვისებების მქონე. მანვე აჩვენა, რომ ყოველი რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე შეიძლება გაიყოს ორ ურთიერთარამკვეთ არსად მარტივ სიმრავლედ. რეკურსიულად გადათვლად ცნობილ კლასებთან შედარებით არსად მარტივ სიმრავლეთა კლასი ნაკლებად არის შესწავლილი.

ნაშრომში ერთიანი სახითაა გადმოცემული სხვადასხვა ავტორთა მიერ ამ კლასთან დაკავშირებით მიღებული მნიშვნელოვანი და საინტერესო შედეგები.

## ANOTATION

The paper deals with a study of nowhere simple sets class. The concept of designated sets was introduced by R. Sore in 70-ies of last century and proved that class has very interesting properties. He showed that every recursively enumerable sets can be split into two disjoint nowhere simple sets. Compare with another well-known recursively enumerable sets, the class of nowhere simple sets is less explored.

In this paper are given important and interesting results about that class of sets with integrated face by various authors.

## სარჩევი:

1. შესავალი ----- 1.
2. რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა წარმოდგენა არსად მარტივი სიმრავლეებით ----- 4.
3. არსად მარტივი სიმრავლეები რეკურსიულად გადათვლად T-ხარისხში ----- 10.
4. მაქსიმალური სიმრავლეების დახასიათება არსად მარტივი სიმრავლეებით ----- 17.
5. არსად მარტივი სიმრავლეების კავშირი Q დაყვანადობასთან-- 22.
6. დასკვნა ----- 33.
7. გამოყენებული ლიტერატურა ----- 34.

## შესავალი

ე. პოსტმა თავის ცნობილ სტატიაში [E. L. Post. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problem. Amer. j. math. , 65, 197-215] შემოიტანა რეკურსიული და რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეების ცნებები. მან აჩვენა, რომ არსებობს რ.გ არარეკურსიული სიმრავლე. რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა იერარქიისათვის ე. პოსტმა განსაზღვრა დაყვანადობის რამდენიმე ცნება. მათ შორის ყველაზე ზოგადია ტიურინგის აზრით დაყვანადობა (T-დაყვანადობა).

ამბობენ, რომ A სიმრავლე T-დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლოურად:  $A \leq_T B$ ), თუ არსებობს ეფექტური მეთოდი, რომელიც ნებისმიერი ნატურალური y რიცხვისთვის პასუხობს კითხვას  $y \in A$ ? იმ პირობით, რომ ნებისმიერი ნატურალური z რიცხვისთვის კითხვაზე  $z \in B$ ? პასუხი წინასწარ ცნობილია. თუ

$$A \leq_T B \text{ და } B \leq_T A,$$

მაშინ

$$A = B.$$

ე. პოსტმა განსაზღვრა ნებისმიერი A სიმრავლისთვის მისი T-ხარისხი, რომელიც აღნიშნა  $\text{deg } A$ , სადაც

$$\text{deg } A = B : B \leq_T A.$$

პოსტმა რეკურსიულ სიმრავლეთა T-ხარისხი აღნიშნა  $\text{deg}_R$ -ით და მის მიერ აგებული რ.გ სიმრავლის T-ხარისხი აღნიშნა  $\text{deg}_R$ -ით.

მან დასვა პრობლემა: არსებობს თუ არა რ.გ. ხარისხი ისეთი, რომ  $\text{deg}_R$ . ამ პრობლემის გადაწყვეტის მიზნით პოსტმა შემოიტანა მარტივ სიმრავლეთა სამი კლასი: მარტივი, ჰიპერმარტივი და ჰიპერჰიპერმარტივი. მარტივ სიმრავლეთა ეს კლასები იმდენად მნიშვნელოვანი და საინტერესო აღმოჩნდა, რომ ამ კლასების სტრუქტურულ თვისებებს დღემდე იკვლევენ, მიღებულია მრავალი მნიშვნელოვანი და საინტერესო შედეგი.

რაც შეეხება არა მარტივ სიმრავლეთა კლასს, ის ნაკლებად არის შესწავლილი და მათი შესწავლის მიზნით 1978 წელს რ. შორმა შემოიტანა არსად მარტივი

სიმრავლის ცნება, რომელიც როგორც შემდგომმა კვლევება ცხადყო, არის საინტერესო და მნიშვნელოვანი ცნება რ.გ სიმრავლეთა თვისებების შესასწავლად.

მოცემული სამაგისტრო ნაშრომი ეძღვნება არსად მარტივ სიმრავლებებს.

ნაშრომში სისტემატური სახით გადმოცემულია სხვადასხვა ავტორის მიერ მიღებული მნიშვნელოვანი შედეგები არსად მარტივი სიმრავლების შესახებ. კერძოდ, მეორე პარაგრაფში მოცემულია რ. შორის შედეგი იმის შესახებ, რომ ყოველი რ.გ. სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი ურთიერთ არამკვეთი არსად მარტივი სიმრავლების სახით, ანუ არსად მარტივი სიმრავლები წარმოქმნიან მთელ რ.გ. სიმრავლეთა კლასს გაერთიანების ოპერაციით. ასევე გადმოცემულია სხვა ავტორთა შედეგები ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლებზე.

მესამე პარაგრაფში მოცემულია რ. შორის ცნობილი თეორემის დამტკიცება იმის შესახებ, რომ ყოველ რ.გ. T -ხარისხში არსებობს არსად მარტივი სიმრავლე.

მეოთხე პარაგრაფში მოცემულია მაქსიმალური სიმრავლის დახასიათება არსად მარტივი სიმრავლების ტერმინებში.

მეოთხე პარაგრაფში მოცემულია სრული დამტკიცება იმისა, რომ ყოველ რ.გ. T - ხარისხში არსებობს რ.გ. სიმრავლე, რომლის Q-ხარიხი არ შეიცავს არც მარტივ და არც არსად მარტივ სიმრავლეს.

შემოვიღოთ რამდენიმე განსაზღვრა:

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ  $A$  სიმრავლე რეკურსიულია, თუ

$f$  ზოგადრეკურსიული ფუნქცია  $x \in A \implies f(x) \in A$  და  $x \notin A \implies f(x) \notin A$ .

უხეზად რომ ვთქვათ, ფუნქციის რეკურსიული განსაზღვრა, ეს არის განსაზღვრა, რომელშიც მოცემული არგუმენტებისათვის ფუნქციის მნიშვნელობები უშუალოდ განისაზღვრებიან იგივე ფუნქციის „უფრო მარტივი“ არგუმენტების მნიშვნელობებით, ან „უფრო მარტივი“ ფუნქციის მნიშვნელობებით.

განსაზღვრა. ნაწილობრივად რეკურსიულ ფუნქციას კლასი ეწოდება უმცირეს კლასს, რომელიც შეიცავს ფუნქციებს  $\lambda x. m$ ,  $\lambda x. x + 1$ ,  $\lambda x. 0, \dots, \lambda x. x + 1$   $i \leq k$  და ჩაკეტილია ჩასმის ოპერაციის მიმართ, პრიმირული რეკურსიის ოპერაციის მიმართ და მინიმიზაციის ოპერაციის მიმართ.

განსაზღვრა. ყველგან განსაზღვრულ ნაწილობრივ რეკურსიულ ფუნქციას ეწოდება ზოგადრეკურსიული ფუნქცია.

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ  $A$  არის არსად მარტივი სიმრავლე, თუ  $A$  არის რეკურსიულად გადათვლადი და ყოველი რ.გ.  $B$  სიმრავლისთვის, სადაც  $B \cap A$  უსასრულოა, არსებობს ისეთი რ.გ. უსასრულო სიმრავლე  $W$ , რომ  $W \cap B = A$ .

განსაზღვრა.  $W \subseteq \text{dom } \varphi$   $\varphi$  ის განსაზღვრის არე .

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ  $A$  სიმრავლე არის რეკურსიული  $B$  სიმრავლეში, თუ  $C \subseteq A$  არის რეკურსიული  $B$  სიმრავლეში.

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ  $C \subseteq A$  არის  $A$  სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია, თუ

$$C \subseteq A \implies \begin{cases} 1, & \text{თუ } x \in A \\ 0, & \text{თუ } x \notin A \end{cases}$$

# 1. რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა წარმოდგენა არსად მარტივი სიმრავლეებით

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ  $A$  სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია (რ.გ), თუ  $A$  , ან არსებობს ისეთი ზოგადრეკურსიული ფუნქცია  $f$ -ი, რომ  $A$  არის  $f$ -ის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

განსაზღვრა. რეკურსიულად გადათვლადი  $A$  სიმრავლის წარმოდგენას  $A = B \cup C$  სახით, სადაც  $B$  და  $C$  რ.გ სიმრავლეებია და  $B \cap C = \emptyset$  , ეწოდება  $A$  სიმრავლის გაყოფა.

არსად მარტივი სიმრავლეების ასაგებად დადებითი და უარყოფითი მოთხოვნები გამოიყენება. დადებითი მოთხოვნების დროს, არსად მარტივი სიმრავლეების აგებისას, ვიღებთ ყველა იმ ელემენტს, რომელიც გადათვლისას გადაეცემა მოცემულ სიმრავლეებში. წინააღმდეგ შემთხვევაში ადგილი ექნება უარყოფით შემთხვევებს.

განსაზღვრა.  $W \cup B$  -ით ავლნიშნავთ ყველა იმ ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც ჯერ გამოითვლებიან  $W$  სიმრავლეში, შემდეგ კი  $B$  სიმრავლეში.

განსაზღვრა.  $\omega = 0, 1, 2, \dots$  არის დადებითი, მთელი რიცხვების სიმრავლე.

განვიხილოთ რიჩარდ შორის გაყოფის შემდეგი თეორემა:

თეორემა (შორი [7]) 1.1. ყოველი რეკურსიულად გადათვლადი  $C$  სიმრავლე შეიძლება გაიყოს ორ არსად მარტივ,  $A$  და  $A$  სიმრავლედ.

დამტკიცება. ვთქვათ  $f$  არის ურთიერთცალსახა რეკურსიული ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობათა არეა  $C$  სიმრავლე.

შემოვიღოთ მარტივი მოთხოვნები  $P_i$  , : გადავცემთ  $n$  ელემენტებს  $W$  სიმრავლიდან  $A$  სიმრავლეში  $i = 1, 2, \dots$  ამ მოთხოვნებს დავალაგებთ შემდეგნაირად:

$$P_1, P_2, \dots,$$

თუ

$$e_{1,n}, e_{2,n}, \dots, \text{ ან } e_{1,n}, e_{2,n}, \dots \text{ და } i = i.$$

ცხადია, რომ  $P_i$  მოთხოვნა  $s$  ნაბიჯზე დაკმაყოფილდება, თუ იარსებებს  $W$  სიმრავლის  $n$  ელემენტები, რომლებიც შევლენ  $A$  სიმრავლეში.

კონსტრუქცია.  $s$  ნაბიჯი:  $f^s$  გადავცემთ  $A$  ან  $A$  სიმრავლეში, ისე რომ უმაღლესი პრიორიტეტის მქონე დაუკმაყოფილებელი მოთხოვნა შესრულდეს. (ცხადია, რომ ჩვენ



შეგვიძლია გამოვიყენოთ  $W$  იმისთვის, რომ ვნახოთ დავაკმაყოფილებთ თუ არა  $P$ , მოთხოვნები.)

ცხადია, რომ

$$A \quad A \quad \text{და} \quad A \quad A \quad C.$$

მაგალითად ვაჩვენოთ, რომ  $A$  არის არსად მარტივი. განვიხილოთ ნებისმიერი  $W$  სიმრავლე ისეთი, რომ  $W \quad A$  არის უსასრულო. თუ  $W \quad A$  უსასრულოა, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ  $W \quad C$  უსასრულოა.

თუ

$$W \quad C \quad x \mid s, t \quad s \quad t \quad \text{და} \quad x \quad W \quad W \quad \text{და} \quad x \quad C \quad C,$$

სასრულია, მაშინ

$$W \quad C \quad x \mid s \quad x \quad W \quad C,$$

თითქმის ტოლია  $W \quad C$  სიმრავლის, რადგან  $W \quad C$  არის რეკურსიულად გადათვლადი, ამიტომ  $W \quad C$  იქნება რეკურსიულად გადათვლადი. მივიღეთ წინააღმდეგობა. აქედან გამომდინარე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ  $W \quad C$  სიმრავლე ჩვენს მოთხოვნებს აკმაყოფილებს. ამრიგად, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ  $W \quad C$  სიმრავლე უსასრულოა. კონსტრუქციაში მოთხოვნების პრიორიტეტული სქემა იძლევა იმის გარანტიას, რომ  $W \quad C \quad A, i \quad 0,1$  არის უსასრულო. ამ შემთხვევაში,  $W \quad A$  სიმრავლის ჩვენთვის საჭირო ქვესიმრავლე არის  $W \quad C \quad A$ .

ზუსტად იგივენაირად დავამტკიცებთ  $A$  სიმრავლის არსად მარტივობას და შედეგად, თეორემის მიხედვით,  $A$  და  $A$  არსად მარტივი ქვესიმრავლეები გვექნება.

ახლა ვნახოთ რაში მდგომარეობს ფრიდბერგის გაყოფის თეორემის არსი (ვ. ჰარიზანოვი [4]):

ყოველი რეკურსიულად გადათვლადი  $B$  სიმრავლე შესაძლოა გაიყოს ორ რეკურსიულად გადათვლად  $A$  და  $A$  სიმრავლედ ისე, რომ ყოველი რ.გ  $W$  სიმრავლისთვის:

- (1) თუ  $W \quad A$  ) რეკურსიულად გადათვლადია, ან  $W \quad A$  ) რეკურსიულად გადათვლადია, მაშინ  $W \quad B$  სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია.

ფრიდბერგის სტრატეგია  $B$  სიმრავლის ორად გაყოფის შესახებ დაფუძნებულია შემდეგ მოთხოვნაზე: რ.გ  $W$  სიმრავლისთვის:

- (2) თუ  $(W \quad B)$  უსასრულოა, მაშინ  $(W \quad A)$  და  $(W \quad A)$  .

შეგვიძლია ვთქვათ, რომ შორის სტრატეგია სიმრავლის ორად გაყოფის შესახებ დაფუძნებულია შემდეგზე: ყოველი რ.გ  $W$  სიმრავლისთვის:

(3) თუ  $(W, B)$  უსასრულოა, მაშინ  $(W, A)$  უსასრულოა და  $(W, A)$  უსასრულოა.

ეს მოთხოვნა უზრუნველყოფს  $A$  და  $A$  სიმრავლეების არსად მარტივობას.

ყოველი რ.გ  $W$  სიმრავლისთვის სამართლიანია, რომ:

(4) თუ  $(W, A)$  სასრულია, ან  $(W, A)$  სასრულია, მაშინ  $(W, B)$  სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია.

ვთქვათ

$$W \text{ ან } A, \quad i = 0, 1,$$

მაშინ (4)-დან გამომდინარეობს შემდეგი:

(5) თუ  $A$  სიმრავლე რეკურსიულია, ან  $A$  რეკურსიულია, მაშინ  $B$  სიმრავლე რეკურსიულია.

რადგან

$$W \text{ ან } A \text{ ან } W \text{ ან } A, \quad i = 0, 1,$$

შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (1)-დან გამომდინარეობს (4), ამ უკანასკნელიდან კი- (5).

ამგვარად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ფრიდბერგის გაყოფის თეორემაში  $A$  და  $A$  სიმრავლეები არსად მარტივებია.

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ  $\xi$  მესერია, თუ ნებისმიერ ორ  $a, b$   $\xi$  ელემენტს აქვს როგორც ზუსტი ზედა საზღვარი  $a \leq b$ , ასევე ზუსტი ქვედა საზღვარი  $a \leq b$ .

ვთქვათ არის მესერი ყველა რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეებისა.

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ  $A$  სიმრავლე მარტივია, თუ:

(1)  $A$  სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია.

(2)  $A$  სიმრავლე უსასრულოა.

(3)  $x \in B$  სიმრავლე უსასრულოა &  $B$  სიმრავლე რ.გ  $B \in A$

შემოვიტანოთ ასეთი აღნიშვნები:

$C$  სიმრავლეა ყველა რეკურსიული სიმრავლეებისა,

$C$  სიმრავლეა ყველა მარტივი სიმრავლეებისა,

$C \in A$   $C$  :  $W \in W$  რ.გ და უსასრულოა, და  $W \in A$  და  $W \in A$  არის მარტივი .

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ  $A$  არის ეფექტურად არსად მარტივი, თუ  $A$  არის რ.გ სიმრავლე და არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია  $f$ -ი, რომ

$$W \text{ ან } A, \quad i = \omega, \omega = 0, 1, 2, \dots$$

და  $W$  უსასრულოა, თუ  $W = A$  უსასრულოა.

წინა განმარტებიდან გამომდინარე  $f$ -ს უწოდებენ  $A$  სიმრავლის მოწმე ფუნქციას.

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ  $A$  არის არაეფექტურად არსად მარტივი, თუ ის არის არსად მარტივი და არ არის ეფექტურად არსად მარტივი.

განსაზღვრა. ვთქვათ გვაქვს რ.გ  $A$ -სიმრავლე და ვიტყვით, რომ  $T$  მოწმე სიმრავლეა  $A$ -თვის, თუ  $T$  რ.გ სიმრავლე ისეთია, რომ

$$T \cap A = \emptyset$$

და ყოველი  $W$ -თვის  $W \cap A = \emptyset$  უსასრულოა, მაშინ  $W = T$  არის უსასრულო.

წინადადება (მილერი და რემელი [6]) 1.1. იმისთვის, რომ  $A$  სიმრავლე იყოს ეფექტურად არსად მარტივი აუცილებელია და საკმარისია, რომ მას ქონდეს მოწმე სიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ  $A$  ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეა და მისი მოწმე ფუნქციაა  $f$ -ი. თუ

$$T \cap W = \emptyset,$$

მაშინ  $T$  არის მოწმე  $A$  სიმრავლისთვის.

სხვა შემთხვევაში, თუ  $T$  არის მოწმე  $A$  სიმრავლის, შეგვიძლია განვსაზღვროთ  $f$  რეკურსიული ფუნქცია ისე, რომ:

$$W \cap T = W.$$

ცხადია  $f$  არის მოწმე  $A$  სიმრავლისთვის და აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ  $A$  არის ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლე.

თეორემა (ჰარიზანოვი [5]) 1.2. ყოველი რ.გ  $A$  სიმრავლისთვის, შემდეგი წინადადებები ერთმანეთის ექვივალენტურია:

(1)  $A$  სიმრავლე იყოფა ორ ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლედ.

(2)  $A = C$  ან  $W \cap W$  რ.გ და  $W \cap A$  და  $W \cap A$  არის მარტივი

(3)  $A = C \cup C \cup C$ .

(4)  $A$  სიმრავლის ყოველი გაყოფა ორ არსად მარტივ სიმრავლედ წარმოადგენს ეფექტურად არსად მარტივ ქვესიმრავლეებს.

დამტკიცება. (1) (2): ვთქვათ, რომ  $A = A_1 \cup A_2$ , სადაც  $A_1 = A_2$  და  $A_1$  და  $A_2$  არიან ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეები.

დავუშვათ  $T$  წარმოადგენდეს  $A$   $i = 0, 1$  სიმრავლის მოწმე სიმრავლეს და

W T T .

ცხადია, რომ

A W და A T , i 0,1 .

ვთქვათ S A W, თუ S არის კოსასრული (ანუ მისი დამატება, S სასრული სიმრავლეა), მაშინ A W, რადგან W არის მოწმე სიმრავლეების თანაკვეთა, რომლებიც რ.გ სიმრავლეებია, ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ A სიმრავლე რეკურსიულია.

ახლა ვთქვათ, რომ S არის კოუსასრულო. ვაჩვენოთ, რომ S მარტივია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, S არის კოსასრული, მაშინ იარსებებს U უსასრულო, რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთი, რომ

U S ,

მაშინ

U A

და ცხადია U T უსასრულოა. თუ გავითვალისწინებთ, რომ

U T A ,

მაშინ

U T T U S

იქნება უსასრულო, მივიღეთ წინააღმდეგობა, ანუ S არის კოსასრული და ასეთი U სიმრავლის არსებობა ადასტურებს, რომ S მარტივია.

(2) (4): ვთქვათ სრულდება (2) წინადადება.

დავუშვათ, რომ A გაყოფილია B , B არსად მარტივ სიმრავლეებად. ვაჩვენოთ, რომ B ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეა. თუ B რეკურსიულია და გავითვალისწინებთ მის არსად მარტივობასაც, მაშინ B ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლე იქნება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, B არ არის რეკურსიული, მაშინ A არ არის რეკურსიული.

ვთქვათ W არის A სიმრავლის შესაბამისი რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე. თუ

A W B B W

და

B B W ,

აქედან გამომდინარე B B W მარტივია. მარტივი სიმრავლის განმარტების თანახმად არსებობს ისეთი უსასრულო, რ.გ R სიმრავლე, რომ

R B B W .

რადგან

$$R \quad B \quad W \quad ,$$

და გავითვალისწინებთ იმას, რომ „ $R \quad B \quad W$  არის უსასრულო“ შესაძლოა შიგვალოს „ $R \quad B \quad W$ “ -ით, მაშინ  $B \quad W$  არის მოწმე  $B$  სიმრავლის და ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლის აუცილებელი და საკმარისი პირობის გათვალისწინებით  $B$  იქნება ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლე. ანალოგიურია  $B$  სიმრავლის შემთხვევაც.

(2) (3) და (4) (1) ექვივალენტობების სამართლიანობა ცხადია შესაბამისი განმარტებებიდან გამომდინარე.

წინდადება (მილერი & რემელი [6]) 1.2. ვთქვათ  $A$  არსად მარტივი სიმრავლე ისეთია, რომ  $A$  გაყოფილია ორ ეფექტურად არსად მარტივ  $A$  და  $A$  სიმრავლეებად, მაშინ  $A$  წარმოადგენს ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეს.

დამტკიცება. ვთქვათ  $A$  სიმრავლე გაყოფილია ორ,  $A$  და  $A$  ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეებად, შესაბამისი მოწმე  $T$  და  $T$  სიმრავლეებით.

ვაჩვენოთ რომ, თუ  $A$  არსად მარტივი სიმრავლეა, მაშინ  $T \quad T$  არის მოწმე სიმრავლე  $A$  სიმრავლისთვის. ცხადია  $T \quad T$  არის რ.გ და

$$T \quad T \quad A \quad .$$

დავუშვათ  $W \quad A$  უსასრულოა. რადგანაც  $A$  არის არსად მარტივი სიმრავლე, მაშინ იარსებებს  $R$  უსასრულო რეკურსიული სიმრავლე ისეთი, რომ  $R \quad W \quad A$  . მაგრამ, თუ

$$R \quad A$$

და რადგან  $T$  არის მოწმე  $A$  -სიმრავლის, მაშინ  $R \quad T$  უსასრულოა. მაგრამ, თუ  $R \quad T$  არის უსასრულო რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთი, რომ

$$R \quad T \quad A$$

და რადგანაც  $T$  არის მოწმე  $A$  სიმრავლის, მაშინ  $R \quad T \quad T$  უსასრულოა. საბოლოოდ მივიღეთ, რომ  $W \quad T \quad T$  არის უსასრულო. მოწმე სიმრავლის განსაზღვრის თანახმად,  $T \quad T$  გამოდის მოწმე  $A$  სიმრავლის, რაც წარმოადგენს  $A$  სიმრავლის ეფექტურად არსად მარტივობის აუცილებელ და საკმარის პირობას.

წინდადება (მილერი & რემელი [6]) 1.3. თუ  $A$  არის ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლე და წარმოდგება ორი,  $A$  და  $A$  რ.გ სიმრავლეების გაერთიანების სახით, მაშინ ეს ქვესიმრავლეებიც ეფექტურად არსად მარტივებია.

დამტკიცება. ვთქვათ  $T$  არის მოწმე  $A$  სიმრავლისთვის, მაშინ  $T \quad A$  და  $T \quad A$  არიან მოწმეები შესაბამისად,  $A$  და  $A$  სიმრავლეებისთვის.

## 2. არსად მარტივი სიმრავლეები რეკურსიულად გადათვლად T-ხარისხში

განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ  $A$  სიმრავლე არის  $T$  (ტიურინგით) დაყვანადი  $B$  სიმრავლეზე (სიმბოლოურად:  $A \leq_T B$ ), თუ არსებობს ეფექტური ალგორითმი, რომელიც ნებისმიერი  $z$ -სთვის იძლევა პასუხს კითხვაზე  $z \in A$ ? იმ პირობით, რომ ანალოგიურ კითხვაზე  $B$  სიმრავლისთვის პასუხი გვაქვს.

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ  $A$  სიმრავლე  $T$ -ექვივალენტურია  $B$  სიმრავლის (სიმბოლოურად:  $A \equiv_T B$ ), თუ

$$A \leq_T B \text{ და } B \leq_T A.$$

$A$  სიმრავლის  $T$ -ხარისხი აღინიშნება  $\text{deg } A$  -ით და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\text{deg } A = \{B : B \equiv_T A\}.$$

განსაზღვრა.  $A \leq_T B$  აღნიშნავს, რომ  $A \equiv_T B \equiv_T A$  არის სასრული.

თეორემა (შორი [7]) 2.1. თუ  $A$  არის რეკურსიულად გადათვლადი  $T$ -ხარისხი, მაშინ არსებობს  $A$  არსად მარტივი სიმრავლე ისეთი, რომ  $A \leq_T$ .

დამტკიცება. ვთქვათ  $C$  არის  $\Sigma_1^1$ -დან აღებული რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე. დავუშვათ

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in C, i \in \mathbb{N}\}$$

და  $f$  არის ურთიერთცალსახა რეკურსიული ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლეა  $B$ . ცხადია, რომ  $B \equiv_T C$ . ავაგოთ  $B$  სიმრავლის, ისეთი მჭიდრო  $A$  ქვესიმრავლე, რომ

$$A = \{x \mid n, x \in A\} \cup B.$$

უარყოფითი მოთხოვნებია  $\mathbb{N}$ , : თუ  $W$ , მაშინ

$$W = A, \text{ e } n.$$

კონსტრუქცია.  $s$  ნაბიჯი: ვაჩვენოთ, არსებობს თუ არა  $n, i \in \mathbb{N}$ ,  $e \in \mathbb{N}$  ისეთი, რომ რაიმე  $n, j$  ელემენტს არ ექნება  $e$  აღნიშვნა. გადავცეთ ასეთი აღნიშვნა. ახლა  $f$   $s$  გადავცეთ  $A$  სიმრავლეში, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას ექნება ეს  $e$  აღნიშვნა.

თუ  $x \in A$ , მაშინ  $x \in f(s) \cup B$  და  $f(s) \cup B$  გადავცეთ  $A$  სიმრავლეში  $s$  ნაბიჯზე, აქედან გამომდინარე, გვექნება

$$A = B \cup C.$$

სხვა შემთხვევაში  $e$  აღნიშვნიანი  $B$  სიმრავლის ელემენტები დარჩებიან  $A$  სიმრავლის გარეთ, სადაც  $e \in n$ . ასე რომ

$$A \cup B$$

და  $n \in C$  (თუ  $n, i \in B$ ,  $i$ -თვის), თუ  $n, 0, n, 1, \dots, n-1$  ელემენტებიდან ერთი მაინც შევა  $A$  სიმრავლეში. აქედან გამომდინარე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ

$$C \subseteq A$$

და

$$A \subseteq C.$$

ვაჩვენოთ, რომ  $A$  არის არსად მარტივი. განვიხილოთ რაიმე  $W$  სიმრავლე, ისეთი რომ  $W \subseteq A$  უსასრულოა. თუ რაიმე  $n$ -თვის  $W \subseteq A$  უსასრულოა, მაშინ  $B$  და  $A$  ცარიელი სიმრავლეებია და  $W$  არის სასურველი რ.გ. ქვესიმრავლე  $W \subseteq A$  სიმრავლის. სხვა შემთხვევაში უსასრულოდ დიდი  $n$ -თვის

$$W \subseteq A.$$

ამიტომ უსასრულო დიდი  $n$ -თვის  $n, i$  ელემენტებს მივანიჭებთ  $e$  აღნიშვნას, ასე რომ არ არსებობს რაიმე ნომერი აღნიშვნით, რომელსაც ოდესმე გადავცემთ  $A$  სიმრავლეში. ხოლო, ასეთი ელემენტებისგან შემდგარი სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადი ქვესიმრავლეა  $W \subseteq A$  სიმრავლის, რომელიც აკმაყოფილებს მოთხოვნებს. საბოლოოდ  $A$  არსად მარტივი სიმრავლის ასაგებად, ჩვენი მოთხოვნები დაკმაყოფილებულია.

განსაზღვრა. შემოვიტანოთ  $(A \text{ join } B)$ -ოპერაციის განმარტება,

$$A \text{ join } B = \{y \mid y = 2x \ \& \ x \in A \ \vee \ y = 2x - 1 \ \& \ x \in B\}.$$

განვიხილოთ თეორემა 2.1-ის სხვა დამტკიცება:

ვთქვათ  $A$  რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე აღებულია რეკურსიულად გადათვლადი  $T$  ხარისხიდან და გაყოფილია ორ  $A$  და  $A$ , არსად მარტივ სიმრავლეებად.

ვაჩვენოთ, რომ

$$A \cup A = A$$

და

$$A \cup A = A.$$

დავუშვათ, რომ

$$A \cup A \neq A;$$

რადგან  $A$  არის  $A$  და  $A$  ქვესიმრავლეების უმცირესი ზედა საზღვარი (ნებისმიერი ორი ელემენტისთვის, სადაც  $a \in A$  და  $b \in A$ , სამართლიანია, რომ  $a \vee b \in A$ ), ამიტომ

$$A \cup A = A.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ სრულდება პირიქით  $A \cup A = A$ . არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია, რომ ყოველი  $x \in A$ -თვის

$$D(x) = 2x - 1,$$

მაშინ

$$x \in A \iff D(x) \in A,$$

აქედან გამომდინარე

$$A \cup A = A.$$

თეორემა (მილერი და რემელი [6]) 2.2. ყოველ რეკურსიულად გადათვლად (ტიურინგის) ხარისხში არსებობს ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეები.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ არის არანულოვანი რეკურსიულად გადათვლადი ხარისხი. ვთქვათ  $C$  არის ხარისხის რ.გ სიმრავლე,  $g$  არის ურთიერთცალსახა რეკურსიული ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე არის  $C$  და  $D$  არის  $N$  სიმრავლის (ნატურალური რიცხვების) ეფექტური დანაწილება ისეთი, რომ

$$|D^{-1}(e)| = e, \quad e = 0, 1, 2, \dots,$$

ანუ

$$N \setminus D = C.$$

და რაიმე  $e$ -ვის შეგვიძლია მოვძებნოთ  $D$ -სიმრავლის ელემენტები.

ბიჯებით ავაგოთ  $A$  ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლე ისეთი, რომ  $C \subseteq A$ .

დავუშვათ, რომ  $A$  ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეა, შემოვიღოთ  $\Delta$  აღნიშვნების  $e = 0, 1, 2, \dots$  უსასრულო სიმრავლე. აღნიშნული სიმრავლის აგებისას  $\Delta$  აღნიშვნები მივანიჭოთ  $W \subseteq A$  სიმრავლის გარკვეულ ელემენტებს.  $W \subseteq A$  სიმრავლის ის ელემენტები, რომლებსაც ექნებათ  $\Delta$  აღნიშვნა მუდმივად დარჩებიან  $A$  სიმრავლის გარეთ, რითაც დასრულდება კონსტრუქცია.

ვთქვათ  $T$  არის სიმრავლე იმ  $x$  ელემენტებისა, რომლებსაც აქვთ  $\Delta$  აღნიშვნა რაიმე  $e$  სთვის და ეს სიმრავლე იქნება მოწმე  $A$  სიმრავლის.



კოდირების მიზნით უზრუნველყოთ, რომ თითოეული  $e$ -სთვის, თუ  $x \in D$  აქვს  $\Delta$  აღნიშვნა, მაშინ  $i \in e$  და თითოეული  $i \in e$ -თვის არსებობს უდიდესი  $y \in D$  ელემენტი  $\Delta$  აღნიშვნით. ასე, რომ უზრუნველყავით არსებობა იმ უმცირესი  $x \in D$  ელემენტისა, რომელსაც არასდროს ექნება აღნიშვნა, რადგან

$$|D| = e - 2.$$

კონსტრუქცია.

0 ნაბიჯი: ვთქვათ  $A = \emptyset$ .

$s+1$  ნაბიჯი: თითოეული  $i \in j$ -სთვის, თუ არსებობს  $x \in W$  ისეთი, რომ:

- 1)  $x \in D \setminus A$ ,
- 2)  $D$  სიმრავლის არცერთ ელემენტს არ ექნება  $\Delta$  აღნიშვნა,
- 3)  $y \in D \setminus W \setminus A$ , სადაც  $y < x$ ,

მაშინ  $x$ -ს მიენიჭება  $\Delta$  აღნიშვნა. შემდეგ  $A$  სიმრავლეში გადავცეთ ყველა ის ელემენტი  $x \in D$ , რომელსაც არ ექნება აღნიშვნა.

ვთქვათ

$$A = A'.$$

შევამოწმოთ, არის თუ არა  $A$  ეფექტურად არსად მარტივი. დავუშვათ, რომ ეს ასეა, მაშინ უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$T = \{x \mid x \text{ აქვს } \Delta \text{ აღნიშვნა რაიმე } e \text{ სთვის}\}$$

არის მოწმე  $A$  სიმრავლისთვის. კონსტრუქციის თანახმად  $T$  არის რ.გ. სიმრავლე და

$$T = A.$$

ვთქვათ  $W \setminus A$  არის უსასრულო, მაშინ

$$W \setminus A = D$$

უსასრულოდ დიდი  $j$ - $e$ -სთვის.

თუ  $x \in W \setminus A = D$ , მაშინ  $x \in W$  იქნება  $s$  ნაბიჯზე და თუ  $e, j \in s$ , მაშინ  $s - 1$  ნაბიჯზე.

კონსტრუქცია უზრუნველყოფს, რომ  $D$  სიმრავლის რაიმე ელემენტს ექნება  $\Delta$  აღნიშვნა.

თუ  $W \setminus A$  უსასრულოა, მაშინ  $W \setminus T$  უსასრულოა და  $T$  არის მოწმე  $A$  სიმრავლისთვის.

ბოლოს ვაჩვენოთ, რომ  $C = A$ . კონსტრუქციის თანახმად  $x \in C$ , თუ

$$D \setminus A = \emptyset,$$

ასე რომ

$$C = A.$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ  $A = C$ .

ვთქვათ მოცემულია ორაკულით  $C$  სიმრავლე და  $n \in N$ . შეგვიძლია ეფექტურად ვიპოვოთ ისეთი, რომ  $n \in D$ . თუ  $e \in C$ , მაშინ  $n \in A$ . თუ  $e \notin C$ , მაშინ იარსებებს ისეთი  $s$  ნაბიჯი, რომ

$$g(s) = e.$$

თუ  $n \in A$ , მაშინ ცხადია, რომ  $n \in A$ .

თეორემა (შორი [7]) 2.3. ყოველ არანულოვან რეკურსიულად გადათვლად ხარისხში არსებობს არაეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეები.

დამტკიცება. დავუშვათ  $C$  არის რ.გ სიმრავლე ხარისხიდან და

$$B = \{x, i \mid x \in C, i \in N\}.$$

ვთქვათ  $h$  არის ურთიერთცალსახა რეკურსიული ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლეა  $B$ . სიმრავლის ასაგებად გამოვიყენოთ უსასრულო სიმრავლე  $\Delta$  აღნიშვნების  $e = 0, 1, 2, \dots$ , სადაც  $\Delta$ -ით აღნიშნულია იმ სიმრავლის ის ელემენტები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ მოთხოვნებს. ავაგოთ  $B$  სიმრავლის არსად მარტივი, მჭიდრო  $A$  ქვესიმრავლე ისეთი, რომ  $n$ -ვის

$$A = \{n, x \mid n, x \in A\} \cup B = \{n, x \mid n, x \in B\}.$$

კონსტრუქცია.  $s$  ნაბიჯი: თითოეული  $e \in n$  ნომრისთვის, ვაჩვენოთ არსებობს თუ არა  $n, i \in W$ , ისეთი რომ რაიმე  $n, j$  ელემენტს არ ექნება ეს  $\Delta$  აღნიშვნა. შევუსაბამოთ  $\Delta$  აღნიშვნა უმცირეს  $n, i$ -ს. შემდეგ  $h(s)$  გადავცეთ  $A$  სიმრავლეში, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას ექნება აღნიშვნა.

ვთქვათ

$$A = A$$

და  $A$  არ არის ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლე. დავუშვათ  $f$  არის  $A$  სიმრავლის მოწმე ფუნქცია.

თუ  $n \in C$ , მაშინ

$$A = B.$$

აქედან გამომდინარე

$$W = N = \{n, j \mid j \in N\},$$

მაშინ

$$W = A \cup \infty$$

და მივიღებთ, რომ  $W = N$  უსასრულოა.

თუ  $n \in C$ , მაშინ  $B \cap N$  სიმრავლის უდიდესი  $n$  ელემენტები, სადაც თითოეული  $e \in n$ , დარჩებიან  $A$  სიმრავლის გარეთ. რადგან

$$W \cap N \subseteq A,$$

მაშინ

$$|W \cap n| = n,$$

რადგან, შეგვიძლია ეფექტურად გამოვთვალოთ  $e$  მიმდევრობა, ისე რომ

$$W \cap N = \emptyset.$$

თუ

$$s \in W \cap n \quad (1),$$

სადაც  $n \in C$ , მაშინ  $C$  არის რეკურსიულად გადათვლადი. მაგრამ, რადგანაც  $C$  რეკურსიულია, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ახლა ვთქვათ  $A$  არსად მარტივი სიმრავლეა. თუ  $W \cap A$  უსასრულოა, მაშინ რაიმე  $n$ -ვის  $W \cap A$  უსასრულოა. თუ  $n \in C$ , აქედან გამომდინარე

$$A \cap B = \emptyset,$$

ისე, რომ  $W \cap W_e \subseteq A$ , ან უსასრულოდ დიდი  $n$ -ვის

$$W \cap A = \emptyset.$$

ნებისმიერ შემთხვევაში დავასაბუთებთ, რომ  $\Delta$  აღნიშვნის  $x$  ელემენტის რაიმე სიმრავლე არის უსასრულო, რეკურსიულად გადათვლადი ქვესიმრავლე  $W \cap A$  სიმრავლის. ასე, რომ  $A$  არის არაეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლე.

თუ  $x \in f \cap s \in B$ , მაშინ  $x \in A$  და  $s$  ნაბიჯზე  $x$  გადავცემთ  $A$  სიმრავლეში. აქედან გამომდინარე

$$A \cap B = C.$$

ზემოთ აღწერილის გათვალისწინებით, თუ

$$A \cap n = \emptyset, \quad n = 0, 1, \dots, n, n-1,$$

მაშინ  $x \in C$  და სამართლიანი იქნება, რომ

$$C \subseteq A.$$

თეორემა (მილერი და რემელი [6]) 2.4. ყოველ არანულოვან რეკურსიულად გადათვლად ხარისხში არსებობს რ.გ. სიმრავლე  $A$  ისეთი, რომ

$$A \cap A = A,$$

$$A \cap A = \emptyset.$$

და  $A$  ,  $A$  ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეებია.

დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ თეორემა 2.3.-ს და წინადადება 1.2.-ს,  $A$  არის არაეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლე არანულოვან რეკურსიულად გადათვლად ხარისხში, რომელიც არ წარმოდგება ორი ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეთა გაერთიანების სახით.

თეორემა (მილერი და რემელი [6]) 2.5. ყოველ რეკურსიულად გადათვლად ხარისხში არსებობს რ.გ. სიმრავლე  $A$  ისეთი, რომ  $A$  არ წარმოდგება ორი არაეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეთა გაერთიანების სახით.

დამტკიცება. თეორემა 2.2.-ის თანახმად ყოველ რ.გ. ხარისხში არსებობს ეფექტურად არსად მარტივი  $A$  სიმრავლე და წინადადება 1.3.-ით აღნიშნული სიმრავლე არ წარმოდგენს ორი არაეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეთა გაერთიანებას.

### 3. მაქსიმალური სიმრავლების დახასიათება არსად მარტივი სიმრავლებით

განსაზღვრა. ვიტყვი, რომ  $M$  მაქსიმალური სიმრავლეა, თუ  $M$  რეკურსიულად გადათვლადია,  $M$  უსასრულოა და

$$B \text{ B რ.გ. } M \text{ B სასრულია ან } M \text{ B სასრულია}.$$

განსაზღვრა.  $A$  სიმრავლეს ეწოდება მაქსიმალური  $B$  სიმრავლეში, თუ  $A$  არის რეკურსიულად გადათვლადი,  $A \text{ B}$ ,  $B \text{ A}$  უსასრულოა და არ არსებობს რეკურსიულად გადათვლადი  $W$  სიმრავლე ისეთი, რომ

$$A \text{ W } B$$

და  $B \text{ W}$ ,  $W \text{ A}$  სიმრავლეები უსასრულოა.

განსაზღვრა. რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლის გაყოფას ორ, არაცარიელ სიმრავლედ ეწოდება არატრივიალური, თუ ორივე ქვესიმრავლე არარეკურსიულია.

$A \text{ B}$  აღნიშნავს, რომ  $A \text{ B}$   $B \text{ A}$  არის სასრული.

თეორემა (ჰარიზანოვი [5]) 3.1. ვთქვათ  $A$  არის რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე.  $A$  სიმრავლის ყოველი არატრივიალური გაყოფა ორ რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლედ არსად მარტივი სიმრავლეებია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ( $A$  არსად მარტივი სიმრავლეა, ან  $A$  არის მაქსიმალური რაიმე რეკურსიულ სიმრავლეში).

დამტკიცება.

: ვთქვათ, რომ  $A$  არის არსად მარტივი სიმრავლე და

$$A \text{ A } A ,$$

სადაც

$$A \text{ A } .$$

ვაჩვენოთ, რომ  $A$  არის არსად მარტივი სიმრავლე. ვთქვათ  $W$  არის რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთი, რომ  $A \text{ W}$  და  $W \text{ A}$  არის უსასრულო. თუ  $W \text{ A}$  უსასრულოა და

$$W \text{ A } W \text{ A} ,$$

მაშინ  $W \text{ A}$  არის ჩვენთვის საჭირო რ.გ სიმრავლე. სხვა შემთხვევაში  $W \text{ A}$  იქნება უსასრულო.

A სიმრავლის არსად მარტივობის გათვალისწინებით, არსებობს უსასრულო რ.გ სიმრავლე R ისეთი, რომ  $R \cap W = A$ , აქედან გამომდინარე  $R \cap W = A$ . საბოლოოდ მივიღეთ, რომ A არის არსად მარტივი სიმრავლე. ამავე მეთოდით ვაჩვენებთ A სიმრავლის არსად მარტივობას.

დავუშვათ A არის მაქსიმალური სიმრავლე B რეკურსიულ სიმრავლეში, მაშინ  $A \cap B$  და  $B \setminus A$  უსასრულოა. ვაჩვენოთ, რომ A და A არსად მარტივებია.

ვთქვათ

$$A \cap A = A,$$

სადაც

$$A \cap A = A$$

და A, A არიან არარეკურსიული რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეები. ვაჩვენოთ, რომ A ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეა, თუ A ∩ B არის შესაბამისი მოწმე სიმრავლე.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, A ∩ B არ არის მოწმე სიმრავლე, მაშინ არსებობს რ.გ W სიმრავლე ისეთი, რომ  $A \cap W = W \setminus A$  უსასრულოა და

$$W \cap A = B.$$

რადგან A არის მაქსიმალური B სიმრავლეში, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ B W სსსრულია, საიდანაც გამომდინარობს

$$A \cap W = B.$$

მივდივართ იქამდე, რომ A არის რ.გ სიმრავლე, რაც ეწინააღმდეგება A სიმრავლის არარეკურსიულობას. ანალოგიურად დგინდება A სიმრავლის ეფექტურად არსად მარტივობა.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა : ვთქვათ A არ არის არსად მარტივი სიმრავლე და A არ არის მაქსიმალური რაიმე რეკურსიულ სიმრავლეში. ვაჩვენოთ, რომ რეკურსიულად გადათვლადი A სიმრავლის არა ტრივიალური გაყოფის დროს, მინიმუმ ერთი ქვესიმრავლე მაინც არ არის არსად მარტივი.

დაშვების თანახმად, თუ A არ არის არსად მარტივი, მაშინ არსებობს W რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთი, რომ  $A \cap W = W \setminus A$  არის უსასრულო და  $W \cap A$  არ შეიცავს უსასრულო რ.გ ქვესიმრავლეებს. თუ W არარეკურსიულია, მაშინ  $U \cap W = W$ . თუ W რეკურსიულია, მაშინ A არ არის მაქსიმალური W-სიმრავლეში, აქედან გამომდინარე არსებობს U რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთი, რომ

$$A \cap U = W$$

და ორივე სიმრავლე  $W \cup U$ ),  $U \cap A$  უსასრულოა.

თუ

$$W \cup U = W \cup U$$

არის უსასრულო, რეკურსიულად გადათვალადი ქვესიმრავლე  $W \cap A$  სიმრავლის, მაშინ  $U$  არარეკურსიუალა. სხვა შემთხვევაში იარსებებს არარეკურსიული  $U$  სიმრავლე ისეთი, რომ  $A \cap U$ ,  $U \cap A$  არის უსასრულო და  $U \cap A$  არ შეიცავს უსასრულო რეკურსიულად გადათვლად ქვესიმრავლეს.

ვთქვათ  $U$  სიმრავლე გაცყოთ ორ  $U_i$ ,  $U_i$  არარეკურსიულ რ.გ სიმრავლედ და

$$A \cap U = A_i, \quad i = 0, 1.$$

თუ  $U \cap A$  და  $U \cap A$  სიმრავლეები უსასრულოა, მაშინ  $A$  და  $A$  არ არიან არსად მარტივი სიმრავლეები. აქედან გამომდინარე, არატრივიალური გაცოფის განსაზღვრის თანახმად, ორივე  $A$  და  $A$  არარეკურსიულეა.

მაგალითად, ვთქვათ  $U \cap A$  უსასრულოა და  $U \cap A$  სასრულია. ცხადია  $A$  არ არის არსად მარტივი სიმრავლე, აქედან გამომდინარე  $A$  რეკურსიული არ არის. გარდა ამისა  $A$  სიმრავლეს არარეკურსიულია, რადგან

$$A \cap U = U.$$

თეორემა (ჰარიზანოვი [5]) 3.2. ვთქვათ  $A$  არის რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე.  $A$ -სიმრავლის ყოველი არატრივიალური გაცოფა ორ რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლედ, წარმოადგენს ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეებს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ( $A$  ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეა ან  $A$  არის მაქსიმალური რაიმე რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეში).

დამტკიცება.

: ვთქვათ, რომ  $A$  არის არსად მარტივი სიმრავლე. თეორემა 1.2 -ის ან წინადადება 1.3 -ის გათვალისწინებით,  $A$  სიმრავლის ყოველი არატრივიალური გაცოფა წარმოადგენს ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეებს.

თუ  $A$  არის მაქსიმალური რაიმე რ.გ. სიმრავლეში, მაშინ თეორემა 3.1 -ის დამტკიცებიდან გამომდინარეობს, რომ  $A$  სიმრავლის ყოველი არატრივიალური გაცოფა, ორ რ.გ სიმრავლეებად, წარმოადგენს ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეებს.

: დავუშვათ, რომ  $A$  არც ეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეა და არც მაქსიმალურია რაიმე რეკურსიულ სიმრავლეში. ვაჩვენოთ, რომ  $A$  სიმრავლის

არატრივიალურ გაყოფში, ერთი ქვესიმრავლე მაინც არ იქნება ეფექტურად არსად მარტივი.

თუ  $A$  სიმრავლე არ არის არსად მარტივი, მაშინ თეორემა 3.1 -ის დამტკიცებიდან გამომდინარეობს, რომ  $A$  და  $A$  არ არიან არსად მარტივი ქვესიმრავლეები. აქედან გამომდინარე, არატრივიალური გაყოფის განსაზღვრის თანახმად, ორივე  $A$  და  $A$  არარეკურსიულებია.

ვთქვათ  $A$  არაეფექტურად არსად მარტივი სიმრავლეა. რადგან  $A$  არარეკურსული სიმრავლეა. შეგვიძლია გავყოთ ეს სიმრავლე ორ,  $A$  და  $A$  არარეკურსულ სიმრავლეებად ისე, რომ

$$A \cup A = A \text{ და } A \cap A = \emptyset.$$

თეორემა 1.2 -ის გათვალისწინებით,  $A$  სიმრავლე არ გაიყოფა ორ, ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეებად, აქედან გამომდინარე  $A$  და  $A$  არ წარმოადგენენ ეფექტურად არსად მარტივ ქვესიმრავლეებს.

თეორემა (მილერი & რემელი [6]) 3.3. ვთქვათ  $M$  არის მაქსიმალური სიმრავლე და გაყოფილია ორ  $M$ ,  $M$  რეკურსიულად გადათვლად არარეკურსიულ სიმრავლეებად, მაშინ ორივე სიმრავლე ეფექტურად არსად მარტივებია.

დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ მოწმე სიმრავლის განსაზღვრას, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ  $M$  არის მოწმე  $M$  სიმრავლის და შებრუნებული ვარიანტიც სამართლიანია.

ვთქვათ  $W$  რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთია, რომ  $W \cap M$  არის უსასრულო, მაგრამ  $W \cap M$  სასრულია. მაშინ

$$W \cap M \cup M \cap M = M \cap M.$$

მაქსიმალური სიმრავლის განმარტებიდან, სამართლიანია

$$W \cap M \cup M \cap M = N.$$

მაგრამ, რადგანაც

$$M \cap W \cap M$$

არის რეკურსიულად გადათვლადი, ამიტომ  $M$  რეკურსიული სიმრავლეა.

თეორემა (მილერი & რემელი [6]) 3.4. ვთქვათ  $S$  სიმრავლე მარტივია და გაყოფილია ორ  $S$ ,  $S$  რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეებად. თუ  $S$  არსად მარტივია, მაშინ  $S$  წარმოადგენს ეფექტურად არსად მარტივ სიმრავლეს, სადაც  $i$  1,2.



დამტკიცება. ვთქვათ  $S$  არის არსად მარტივი, მაშინ სამართლიანია მოვითხოვოთ რომ  $S$  იყოს მოწმე  $S$ -სიმრავლის.

ვთქვათ  $W$  რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა. თუ  $W \neq S$  არის უსასრულო, მაგრამ  $W \neq S$  სასრულია, მაშინ არსად მარტივი სიმრავლის განსაზღვრიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვიპოვოთ უსასრულო რეკურსიული სიმრავლე  $R \subseteq W \setminus S$  ისეთი, რომ

$$R \cap S = \emptyset.$$

რადგანაც  $R \subseteq W$ , მივიღეთ საწინააღმდეგო, რომ  $S$  სიმრავლე არ არის მარტივი.

#### 4. არსად მარტივი სიმრავლეების კავშირი $Q$ დაყვანადობასთან

განსაზღვრა. ამბობენ, რომ  $A$  სიმრავლე არის  $Q$  დაყვანადი  $B$  სიმრავლეზე (სიმბოლოურად:  $A \leq B$ ), თუ

$$f \text{ რეკურსიული ფუნქცია } x \in A \iff f(x) \in B.$$

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ  $A$  არის  $Q$  დაყვანადი  $B$ -ზე და აღნიშნავენ  $A \leq B$  -ით, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$(f \text{-რეკურსიული ფუნქცია}) \quad x \in A \iff f(x) \in B \text{ და } |W| = \infty.$$

განსაზღვრა. ვიტყვით, რომ  $A$  სიმრავლე  $Q$ -ექვივალენტურია  $B$  სიმრავლის (სიმბოლოურად:  $A \sim B$ ), თუ

$$A \leq B \text{ და } B \leq A.$$

$A$  სიმრავლის  $Q$ -ხარისხი აღინიშნება  $\deg A$  -ით და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\deg A = \min\{B \mid A \leq B\}.$$

ქვემოთ ნაჩვენებია, რომ თუ რ.გ  $Q$  ხარისხი შეიცავს არსად მარტივ სიმრავლეს, მაშინ ამ ხარისხში შემავალი ყოველ რეკურსიულად გადათვლი სიმრავლე იქნება არსად მარტივი.

ბუნებრივად ისმის კითხვა: ყოველი რ.გ არარეკურსიული  $Q$  ხარისხი შეიცავს თუ არა მარტივ ან არსად მარტივ სიმრავლეს? უარყოფით პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა (ომანაძე [1]) 4.1. ყოველი არარეკურსიული რეკურსიულად გადათვლი სიმრავლის  $T$  ხარისხი შეიცავს ისეთ რეკურსიულად გადათვლი სიმრავლეს, რომლის  $Q$  ხარისხი არ შეიცავს არც მარტივ და არც არსად მარტივ სიმრავლეებს.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ შემდეგი წინადადებები, შედეგები და თეორემები.

დასაწყისისთვის მოვიყვანოთ სოლოვევის ასეთი შედეგი.

თეორემა (სოლოვევი [4]) 4.2. თუ  $A$  და  $B$  რეკურსიულად გადათვლი სიმრავლეებია, მაშინ

$$A \leq B \iff A \leq B.$$

დამტკიცება. ვთქვათ  $A \subseteq B$ , ანუ სამართლიანია

$$x \in A \implies x \in B.$$

მოვახდინოთ სიმრავლის „ჩამოჭრის“ ასეთი პროცესი: ვითვლით  $W$  სიმრავლის პირველ ელემენტს და ამ ელემენტს გადავცემთ  $W$ -ში. ველოდებით, გამოითვლება თუ არა ეს ელემენტი  $B$  სიმრავლეში (ერთდროულად ვითვლით  $A$  და  $B$  სიმრავლეებს). თუ გამოითვლება, მაშინ ვითვლით  $W$ -ის მეორე ელემენტს და მას გადავცემთ  $W$ -ში და ა.შ. თუ რომელიმე ელემენტი არ აღმოჩნდება  $B$ -სიმრავლეში, ან  $x$  გამოითვლება  $A$ -სიმრავლეში, მაშინ პროცესი გაჩერდება.

საბოლოოდ ავაგებთ ახალ  $W$  სიმრავლეს, რომელიც შედგება ამ ელემენტებისგან და სადაც  $g(x)$  რეკურსიული ფუნქციაა. მაშინ ცხადია, რომ  $A \subseteq Q$ -ით  $B$ -სიმრავლეზე  $g$  ფუნქციით.

განსაზღვრა.  $|W|$  არის  $W$  სიმრავლის სიმძლავრე.

წინადადება (ომანაძე [1]) 4.1. ვთქვათ  $A$  რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა,  $B$  არსად მარტივი სიმრავლეა და

$$A \cap B = \emptyset,$$

მაშინ  $A$  არის არსად მარტივი სიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ  $A$  რ.გ სიმრავლეა,  $B$  არსად მარტივი სიმრავლეა და  $f$  რეკურსიული ფუნქცია ისეთია, რომ

$$x \in A \implies f(x) \in B, \\ x \notin A \implies f(x) \notin B.$$

ვთქვათ  $W$  რ.გ სიმრავლე ისეთია, რომ  $|W \setminus A| = \infty$ .

ვთქვათ

$$C = W \setminus B.$$

განვიხილოთ შემთხვევები: ა)  $|C| = \infty$  და ბ)  $|C| < \infty$ .

ა): ვთქვათ  $|C| = \infty$  და

$$U = \{x \in W \mid x \in C\}.$$

ცხადია

$$W \setminus A = U \cup (W \setminus U) = W \setminus A.$$

აქედან გამომდინარე  $W \setminus A$  შეიცავს უსასრულო რეკურსიულად გადათვლად ქვესიმრავლებებს.

ბ): ვთქვათ  $|C| = \infty$  და რადგან  $B$  არსად მარტივია, მოიძებნება ისეთი რეკურსიულად გადათვლადი  $V$  სიმრავლე, რომ

$$|C| = \infty \text{ და } V \subseteq C.$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$x: W \subseteq V.$$

რადგან

$$x \in |W| \implies \infty,$$

მაშინ

$$|x: W \subseteq V \cap W| = \infty$$

და

$$x: W \subseteq V \cap W \setminus A.$$

წინადადება (ომანაძე [1]) 4.2. ვთქვათ  $A$  და  $B$  არსად მარტივი სიმრავლებებია, მაშინ  $A \cap B$  არსად მარტივია.

დამტკიცება. ვთქვათ  $W$  რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა და

$$|W \setminus A \cap B| = \infty,$$

მაშინ

$$|2x: 2x \in W \setminus A \cap B| = \infty,$$

ან

$$|2x \in 1: 2x \in 1 \cap W \setminus A \cap B| = \infty.$$

ვთქვათ

$$|2x: 2x \in W \setminus A \cap B| = \infty,$$

მაშინ

$$|x: 2x \in W \setminus A| = \infty.$$

რადგან  $A$  სიმრავლე არსად მარტივია, მაშინ არსებობს უსასრულო, რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე  $C$  ისეთი, რომ

$$C \subseteq x: 2x \in W \setminus A.$$

ვთქვათ

$$C \subseteq 2x: x \in C,$$

მაშინ

$$|C_1| = \infty \text{ და } C_1 = W \setminus A \cup B.$$

ზუსტად იგივე დამტკიცების პროცესი მიმდინარეობს იმ შემთხვევაში, როცა

$$|2x - 1| : 2x - 1 = |W \setminus A \cup B| = \infty.$$

ლემა (ომანაძე [2]) 4.1. ვთქვათ A რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა და B ისეთია, რომ

$$A \cup B = C$$

მაშინ A = B.

დამტკიცება. ვთქვათ, რომ არსებობს ისეთი f და g რეკურსიული ფუნქციები, რომ

$$\begin{aligned} x \in x \in A \cup W \setminus B, \\ x \in x \in B \cup W \setminus C. \end{aligned}$$

ნაბიჯ-ნაბიჯ ავაგოთ ისეთი h რეკურსიული ფუნქცია, რომ

$$(1) \quad x \in |W| = \infty$$

$$(2) \quad x \in x \in A \cup W \setminus B.$$

ნაბიჯი 0: W სიმრავლის პირველ ელემენტად ავიღოთ ისეთი y -ი, რომელიც აღმოჩნდება W -ის გადათვლისას (გავითვალისწინოთ დამატებით, რომ

$$x \in W.$$

ნაბიჯი s: ვთქვათ ამ ეტაპზე გვაქვს

$$W = y_1, \dots, y_k,$$

და აგებულია სიმრავლეები

$$F_1, F_2, \dots, F_k,$$

სადაც

$$F_i = W \setminus y_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

მოცემულ s ნაბიჯზე გადათვლილი გვექნება სიმრავლეები:

$$A, W \setminus y_i, C, W \setminus y_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

თუ  $x \in A$ , მაშინ აღნიშნული სიმრავლის აგების პროცესი აქ გაჩერდება.

თუ  $x \in A$ , მაშინ ვამოწმებთ ადგილი აქვს თუ არა ასეთ მიმართებას:

$$i = 1 \dots i = k \quad F_i = C.$$

თუ ასეთი მიმართება სრულდება, მაშინ W -ის პირველ ელემენტად ავიღოთ  $y_1$ , რომელიც W -ის ელემენტებში  $y_1$ -ელემენტის შემდეგაა წარმოდგენილი.

ყოველი i-სთვის  $i = 1, \dots, k$  მივიღებთ მიმდევრობას:

$$z \quad \min z: z \quad W \quad , \setminus F \quad , \quad ,$$

თითოეული  $z$  გადავცეთ  $F$  , სიმრავლეში და გადავიდეთ შემდეგ ნაბიჯზე.

ძნელი არაა დავინახოთ, რომ ჩვენს მიერ აგებულ  $F$  სიმრავლეთა აგების პროცესი შეწყდება, მას შემდეგ რაც დასრულდება ნაბიჯების გადათვლა და  $W$  დააკმაყოფილებს (1) და (2) მოთხოვნებს.

თეორემა (ომანაძე [1]) 4.3. ვთქვათ  $A$  მარტივი სიმრავლეა,  $B$  ნებისმიერი სიმრავლეა,  $C$  არსად მარტივი სიმრავლეა,  $K$  რეკურსიულად გადათვლადი  $Q$  სრული სიმრავლეა და

$$A \quad B \quad C \quad K,$$

მაშინ  $A \quad B$ .

თორემის დასამტკიცებლად ვისარგებლოთ შემდეგით:

ლემა (ომანაძე [1]) 4.2. ვთქვათ  $A$  მარტივი სიმრავლეა,  $B$  ნებისმიერია,  $C$  არსად მარტივი სიმრავლეა და  $f$  ფუნქციით

$$A \quad B \quad C,$$

თუ  $W$  რ.გ სიმრავლე ისეთია, რომ  $W \setminus A$  უსასრულოა, მაშინ

$$(1) \quad 2x \quad 1: 2x \quad 1 \quad W \quad B \quad C \quad \infty$$

$$(2) \quad 2x: 2x \quad W \quad B \quad C \quad \infty.$$

დამტკიცება. ვთქვათ ლემის პირობები სრულდება

$$x \quad x \quad A \quad W \quad B \quad C \\ x \quad |W \quad | \quad \infty .$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$W \quad B \quad C \quad \infty.$$

თუ

$$W \quad B \quad C \quad \infty,$$

დავუშვათ, რომ

$$W \quad x: W \quad W \quad \setminus B \quad C \quad ,$$

მაშინ

$$W \setminus A = W \text{ და } W \setminus A = \emptyset,$$

გამოდის, რომ  $W$  უსასრულო რეკურსიულად გადათვლადია და შედის  $A$  სიმრავლეში, რაც შეუძლებელია  $A$  სიმრავლის სიმარტივიდან გამომდინარე.

ვთქვათ

$$W = \{2x - 1 : x \in W\},$$

$$W = \{x : 2x - 1 \in W\},$$

დავუშვათ, რომ

$$|W_1 \setminus B \setminus C| = \infty,$$

მაშინ

$$|W \setminus C| = \infty.$$

$C$  არსად მარტივი სიმრავლის განმარტებიდან გამომდინარე  $W$  უსასრულო, რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთია, რომ  $W = W \setminus C$ .

ვთქვათ

$$W = \{2x - 1 : x \in W\}$$

რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა, მაშინ გამოდის, რომ

$$W = B \setminus C \text{ და } W = W.$$

დავუშვათ ახლა, რომ

$$W = \{x : W = W\},$$

რადგან

$$x \in |W| = \infty$$

მაშინ  $|W| = \infty$ . მივიღეთ, რომ  $W$  უსასრულო, რ.გ სიმრავლე შედის  $A$  სიმრავლეში. რაც ეწინააღმდეგება  $A$  მარტივი სიმრავლის განმარტებას. ამიტომ

$$|W \setminus B \setminus C| = \infty$$

და ცხადია, რომ

$$2x : 2x \in W \setminus B \setminus C = \infty.$$

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა 4.3:

ვთქვათ  $A$  მარტივი სიმრავლეა,  $B$  ნებისმიერია,  $C$  არსად მარტივი სიმრავლეა, ლემა 4.1-ის გათვალისწინებით იარსებებს  $f$  რეკურსიული ფუნქცია ისეთი, რომ

$$(1) \quad x \in x \in A \setminus W \setminus B \setminus C,$$

$$(2) \quad x \in |W| = \infty.$$

შემოვიტანოთ ასეთი აღნიშვნა:

$$R = 2x^2 - 1, \quad W = B \setminus C,$$

ლემა 4.2-ის გათვალისწინებით  $|R| = \infty$ .

ვთქვათ, რომ

$$W = 2x^2 - 1, \quad R = x^2 - 1.$$

მაშინ  $R = A$  და  $A$  სიმრავლის სიმარტივიდან გამომდინარეობს, რომ  $|R| = \infty$ . ავიღოთ რეკურსიული ფუნქცია  $f$  ისეთი, რომ

$$W = \begin{cases} W, & \text{თუ } x \in R \\ a, & \text{თუ } x \notin R \end{cases}$$

სადაც ელემენტი  $a \in B$ .

მაშინ

$$x \in A \iff W = B \text{ და } x \in R \iff W = B,$$

თუ  $x \in A$ , მაშინ  $x \in R$  ან  $x \notin R$ . განვიხილოთ ეს ორი შემთხვევა ცალ-ცალკე.

თუ  $x \in R$ , მაშინ

$$W = a \in B \iff W = B.$$

თუ  $x \notin R$ , მაშინ

$$W = B \text{ და } W = R \iff W = B \text{ და } W = W \iff W = B.$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$x \in x \iff A = W \iff B.$$

განსაზღვრა. ამბობენ, რომ  $A$  სიმრავლე არის  $m$  დაყვანადი  $B$  სიმრავლეზე (სიმბოლოურად:  $A \leq B$ ), თუ

$$f \text{ რეკურსიული ფუნქცია } x \in x \iff A \iff f(x) \in B.$$

განსაზღვრა. ვიტყვი, რომ  $A$  სიმრავლე  $m$ -ექვივალენტურია  $B$  სიმრავლის (სიმბოლოურად:  $A \equiv B$ ), თუ

$$A \leq B \text{ და } B \leq A.$$

$A$  სიმრავლის  $m$ -ხარისხი აღნიშნება  $\deg A$  -ით და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\deg A = B \iff B \leq A.$$

განსაზღვრა. ვიტყვი, რომ  $A$  სიმრავლე არასადარია  $Q$ -ით  $B$  სიმრავლის (სიმბოლოურად:  $A \not\leq B$ ), თუ

$$A \leq B \text{ და } B \not\leq A.$$



წინადადება (ომანაძე [1]) 4.3. ვთქვათ  $A$  არ არის არსად მარტივი სიმრავლე,  $B$  არსად მარტივი სიმრავლეა, ვთქვათ  $A$  და  $B$  სიმრავლეები  $Q$ -არასადარებია ( $A|B$ ), მაშინ  $A \cap B$  სიმრავლის  $Q$ -ხარისხი არ შეიცავს არც მარტივ და არც არსად მარტივ სიმრავლეებს.

დამტკიცება. რადგან  $A$  არ არის არსად მარტივი და

$$A \cap A \cap B,$$

მაშინ  $A \cap B$  არ არის არსად მარტივი; აქედან გამომდინარე  $A \cap B$  სიმრავლის  $Q$ -ხარისხი არ შეიცავს არსად მარტივ სიმრავლეებს.

ვთქვათ  $S$  მარტივი სიმრავლეა და

$$S \cap A \cap B,$$

მაშინ

$$S \cap A \cap B \cap S \cap A \cap B \cap A \cap B \cap S,$$

$$S \cap A \cap A \cap B \cap S \cap A \cap A \cap B \cap S \cap S \cap A \cap A \cap A \cap B \cap B \cap A,$$

რადგან  $A \cap B$  სიმრავლის  $Q$ -ხარისხი არ შეიცავს მარტივ სიმრავლეებს, ამიტომ

$$B \cap Q \cap A.$$

ეს კი ეწინააღმდეგება  $A|B$ -ის პირობას.

ახლა მივუბრუნდეთ თეორემა 4.1-ის დამტკიცებას: ვთქვათ, რომ ნებისმიერი არარეკურსიული რეკურსიულად გადათვლადი  $T$ -ხარისხია,  $A$  რ.გ სიმრავლე შედის  $\Sigma^0_1$ -ში,  $B, C$  რ.გ სიმრავლეები ისეთია, რომ

$$A \cap B \cap C,$$

$$B \cap C$$

და  $B, C$  ტიურინგით არასადარებია (სიმბოლოურად:  $A|_T B$ ).

ვთქვათ  $B$  რ.გ. სიმრავლე არ არის არსად მარტივი და

$$B \cap B,$$

ხოლო  $C$  არსად მარტივია და

$$C \cap C,$$

მაშინ წინადადება 4.3-ის გათვალისწინებით  $B \cap C$  სიმრავლის  $Q$ -ხარისხი არ შეიცავს არსად მარტივ და მარტივ სიმრავლეებს. ცხადია, რომ

$$A \cap B \cap C.$$

განსაზღვრა. ვიტყვი, რომ A სიმრავლე sQ-დაყვანადია B სიმრავლეზე  $A \subseteq B$ , თუ არსებობს რეკურსიული f ფუნქცია ისეთი, რომ

$$x, y \in A \iff W(x) \leq W(y) \text{ და } y \in B \iff W(y) \leq g(x).$$

თორემა (ომანაძე [3]) 4.4. ვთქვათ A მარტივი სიმრავლეა, B სიმრავლე ნებისმიერია და C არსად მარტივია, მაშინ

$$A \subseteq B \iff C \subseteq A \subseteq B.$$

თეორემის დამტკიცებამდე განვიხილოთ ასეთი ლემა:

ლემა (ომანაძე [3]) 4.3. ვთქვათ A სიმრავლე მარტივია, B სიმრავლე ნებისმიერია, C არსად მარტივია, f და g რეკურსიული ფუნქციებია და f, g ფუნქციებით

$$A \subseteq B \subseteq C,$$

და W-რ.გ სიმრავლე ისეთია, რომ  $W \setminus A$  უსასრულოა, მაშინ

$$(1) \quad 2x \leq 1: 2x \leq 1 \iff W(x) \leq W(y) \iff B \subseteq C \iff \infty$$

$$(2) \quad 2x: 2x \iff W(x) \leq W(y) \iff B \subseteq C \iff \infty.$$

დამტკიცება: ვთქვათ სრულდება ლემის პირობები და ვაჩვენოთ, რომ

$$W \subseteq B \subseteq C \iff \infty.$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო:

$$W \subseteq B \subseteq C \iff \infty,$$

და ვთქვათ

$$W \subseteq x: W \subseteq W \setminus B \subseteq C, \quad ,$$

მაშინ

$$W \setminus A \subseteq W \text{ და } W \subseteq A.$$

მივიღებთ, რომ W უსასრულო რეკურსიულად გადათვლადია და შედის A სიმრავლეში, რაც შეუძლებელია A სიმრავლის სიმარტივიდან გამომდინარე.

ვთქვათ

$$W = \{2x - 1 : 2x - 1 \mid x \in W\},$$

$$W = \{x : 2x - 1 \in W\},$$

დავუშვათ, რომ

$$|W \setminus B \setminus C| = \infty,$$

მაშინ

$$|W \setminus C| = \infty.$$

C არსად მარტივი სიმრავლის განმარტებიდან გამომდინარე W უსასრულო, რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთია, რომ

$$W = W \setminus C.$$

ვთქვათ

$$W = \{2x - 1 : x \in W\}$$

რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა, მაშინ გამოდის, რომ

$$W = B \setminus C$$

და

$$W = W.$$

ახლა დავუშვათ, რომ

$$W = \{x : W \setminus W\},$$

რადგან

$$x \in W \iff \infty,$$

ამიტომ  $|W| = \infty$ .

მივიღეთ, რომ W უსასრულო, რ.გ სიმრავლე შედის A სიმრავლეში. რაც ეწინააღმდეგება A მარტივი სიმრავლის განმარტებას. ამიტომ

$$|W \setminus B \setminus C| = \infty.$$

ახლა დავამტკიცოთ თორემა 4.4:

ვთქვათ A სიმრავლე მარტივია, B სიმრავლე ნებისმიერია, C არსად მარტივია, f და g რეკურსიული ფუნქციები ისეთია, რომ

$$x, y \in x \in A \iff W \setminus B \setminus C \text{ \& } y \in W \iff y \in g(x).$$

დავუშვათ

$$R = \{2x - 1 : 2x - 1 \in W \setminus B \setminus C\},$$

მაშინ ლემა 4.3-ის გათვალისწინებით  $|R| = \infty$ .

ვთქვათ, რომ

$$\begin{aligned} W &= 2x: 2x \quad W, \\ R &= x \quad W \quad R. \end{aligned}$$

მაშინ  $R \in A$  და  $A$  სიმრავლის სიმარტივიდან გამომდინარეობს, რომ  $|R| = \infty$ .

განვსაზღვროთ  $f$  რეკურსიული ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} W &= W, \quad \text{თუ } x \in R \\ &= a, \quad \text{თუ } x \notin R \end{aligned}$$

სადაც ელემენტი  $a \in B$ .

მაშინ

$$x \in A \quad W \quad B \quad C \quad \text{და} \quad x \in R \quad W \quad W \quad B.$$

თუ  $x \in A$ , მაშინ  $x \in R$  ან  $x \notin R$ . განვიხილოთ ეს ორი შემთხვევა ცალ-ცალკე.

თუ  $x \in R$ , მაშინ

$$W = a \in B \quad W \in B.$$

თუ  $x \notin R$ , მაშინ

$$W = B \quad C \quad \text{და} \quad W \in R \quad W \in B \quad \text{და} \quad W \in W \quad W \in B.$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$x \in x \in A \quad W \in B.$$

და  $f$  რეკურსიული ფუნქციით  $A$  სიმრავლე  $\omega$ -დაყვანადია  $B$  სიმრავლეზე და

$$g(x) = g(x) \quad a.$$

## დასკვნა

ნაშრომი ეძღვნება არსად მარტივ სიმრავლეთა კლასს, რომელიც რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა სხვა კლასებთან შედარებით ნაკლებადაა შესწავლილი. ამ კლასის ცნება შემოიტანა რ. შორმა და აჩვენა, რომ მთელი რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა კლასი შეიძლება წარმოიქმნას არსად მარტივ ურთიერთარამკვეთ სიმრავლეთა გაერთიანებით. შემდეგში, სხვადასხვა ავტორმა დაადგინა მრავალი საინტერესო თვისება არსად მარტივი სიმრავლეებისა.

ნაშრომში ერთიანი სახით გადმოცემულია სხვადასხვა ავტორის მიერ მიღებული საინტერესო შედეგები არსად მარტივი სიმრავლეების შესახებ. კერძოდ, მოყვანილია რ. შორის თეორემა, რომ ყოველ რეკურსიულად გადათვლად ტიურინგის ხარისხში არსებობს არსად მარტივი სიმრავლე; ასევე, მაქსიმალური სიმრავლის დახასიათება არსად მარტივი სიმრავლის ტერმინებში, რომელიც ეკუთვნის დ. მილერსა და ჯ. რემელს.

გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხა:

1. P. Ш. Оманадзе, “Q-Сводимость и Нигде Непростые Множества”, сообщения академии наук грузинской сср, 127, № 1, 1987.
2. P. Ш. Оманадзе, Алгебра и Логика, 23, № 2, 1984, 175-184.
3. P. Ш. Оманадзе, “Соотношения Между Некоторыми Сводимостями”, Алгебра и Логика, 33, № 6, 1994, 381-385.
4. В. Д. Соловьев, “Q-Сводимость и Гипергиперпростые Множества, Вероятн. Методы и киберн. ”, 10-11 (1974), 121-128.
5. Valentina S. Harizanov, “Effectively and Noneffectively Nowhere Symple Sets”, Math. Log. Quart. 42 (1996) 241-248.
6. D. Miller and J. B. Remmel, “Effectively Nowhere Symple Sets”, The Journal of Symbolic Logic, Volume 49, Number 1, march 1984.
7. Richard A. Shore, “Nowhere simple Sets and The Lattice of Recursively Enumerable Sets”, Journal of Symbolic Logic, Volume 43, Number 2, June 1984.