

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საზუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის მიმართულება

ანალიზისი ქვემიმართულება

გეგა გულადაშვილი

რეგულარულ განტოლებათა სისტემისაგან ინდუცირებული ვექტორული ფიბრაციის

ინვარიანტების შესახებ

(სამაგისტრო ნაშრომი)

ხელმძღვანელი :

ფიზიკა - მათემატიკის მეცნიერებათა

დოქტორი,

ასოცირებული პროფესორი

გია გიორგაძე

თბილისი

2016

სარჩევი

§1მთავარი ფიზრაციის ცნება.....	5
§2ვექტორული ფიზრაციის ცნება.....	13
§3რიორლის კონსტრუქცია.....	20
§4წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები რიმანის სფეროზე.....	23
§5ალგორითმი.....	28

ანოტაცია

ნაშრომში კვლევის ობიექტია რეგულარულ განტოლებათა სისტემები რიმანის სფეროზე. როგორც კარგად ცნობილია, მერომორფულ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის მონოდრომიის წარმოდგენა განსაზღვრავს არაკომპაქტურ რიმანის ზედაპირზე (რიმანის სფეროდან ამოგდებული განტოლებათა სისტემის განსაკუთრებული წერტილები) ჰოლომორფულად ტრივიალურ ვექტორულ ფიბრაციას. ნაშრომში განხილულია ამ ფიბრაციის გაგრძელების ტექნიკა მთელ რიმანის სფეროზე. მიღებული ფიბრაციას აქვს თავისი ტოპოლოგიური მახასიათებელი - ჩერნის რიცხვი, აგრეთვე, ანალიზური მახასიათებელი - გახლეჩვის ტიპი, იგი ვექტორია მთელი კოორდინატებით და მისი კოორდინატების ჯამი ჩერნის რიცხვის ტოლია. ნაშრომის პირველ და მეორე პარაგრაფში გადმოცემულია აუცილებელი კონსტრუქციები, განმარტებები და დებულებები, რომლებიც მომდევნო პარაგრაფებში გამოიყენება. მესამე პარაგრაფებში გადმოცემული მთავარი და ვექტორული ფიბრაციების აგების ტექნიკა კოციკლების საშუალებით. მეხუთე პარაგრაფში მოყვანილია მერომორფულ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისაგან მერომორფული ბმულობის მქონე ვექტორული ფიბრაციის აგების ტექნიკა, ამასთან მნიშვნელოვანია აქ მოყვანილი ალგორითმი მიღებული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპის დასადგენად. აღნიშნული საკითხი მწირადაა განხილული სამეცნიერო ლიტერატურაში. რის გამოც ეს კონსტრუქცია დაწვრილებით არის გადმოცემული ნაშრომში. ბოლოს ჰიპერგეომეტრიული განტოლებათა სისტემისაგან ინდუცირებული ვექტორული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპი გამოთვლილი ორგანზომილებიანი ვექტორული ფიბრაციისათვის იმ შემთხვევაში, როდესაც განტოლების მონოდრომიის წარმოდგენა დაუყვანადია.

Ressume

In the work regular system of differential equations on Riemann sphere are investigated. It is known that system of equation on sphere with meromorphic coefficients defines monodromy representation on fundamental group of non compact Riemann surface (Riemann sphere without singular points of system of equations) and induces trivial holomorphic vector on Riemann surface.

In work considered extension of this bundle on entire Riemann sphere. The bundle obtained after the extension is nontrivial and has topological invariant Chern number, also splitting type, which completely defines analytic structures of this bundle. The splitting type of bundle is integer valued vector and sum his coordinates coincides of Chern number of this bundle. In First and second sections of the work is given necessary definition, constructions and propositions which used next sections. In the third section technique of construction of bundles by cocycles is given.

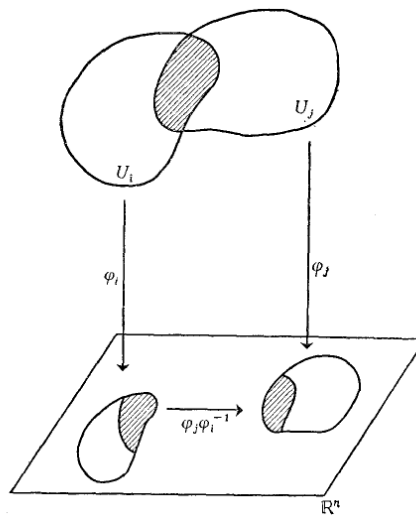
In fifth section given construction of bundles with meromorphic connection on Riemann sphere, here the algorithm to calculate splitting type of vector bundle is given. This topic not well described in scientific literature, hence in work detailed analysis of this topic is given. In Finally general constructions from previous sections is used for hypergeometric equations and in case, when monodromy representation induced from hypergeometric equations is nonreduced is investigated. In this case is obtained completely solution of the problem, calculated splitting type of two dimensional vector bundle on Riemman sphere.

§1. მთავარი ფიზიკის ცნება

ტოპოლოგიურ სივრცეს M უწოდებენ n გონზომილებიან მრავალსახეობას, თუ ის არის ლოკალურად ჰომეომორფული R^n -ის. უკანასკნელი ნიშნავს, რომ M -ში არის ღია დაფარვა $U = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$ ისეთი, რომ ყოველი $i \in \Lambda$ არსებობს ჰომეომორფული ასახვა $\varphi_i : U_i \rightarrow R^n$. (φ_i, U_i) უწოდებენ რუკას (ან კოორდინატთა სისტემას) U_i განსაზღვრის არით. ყველა რუკათა $\phi = \{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in \Lambda}$ სიმრავლეს ეწოდება ატლასი. ვიტყვი, რომ ორ რუკას $(\varphi_i, U_i), (\varphi_j, U_j)$ აქვს C^r -გადაფარვა თუ

$$\varphi_i \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

ერთი კოორდინატთა სისტემიდან მეორე კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლისას, გააჩნია C^r კლასის სიგლუვე.



მანამ სანამ დავიწყებთ ინვარიანტულ (უკოორდინატო) ფიზიკის შესწავლას, შემოვიღოთ ზოგიერთი განსაზღვრება.

განსაზღვრება 1.1 : ლის ჯგუფი G ეწოდება მრავალსახეობას, რომელიც არის ჯგუფი, ამასთანავე ჯგუფის ოპერაციები

$$1) G \times G \rightarrow G \quad ((g, h) \mapsto gh);$$

$$2) G \rightarrow G \quad (g \mapsto g^{-1})$$

არის მრავალსახეობის უწყვეტები (გლუვი, ანალიზური და ა.შ.) ასახვები.

განსაზღვრება 1.2: უწყვეტ მოქმედებას G -ის ჯგუფისა X მრავალსახეობაზე მარჯვნიდან, უწოდებენ ისეთ უწყვეტ (გლუვი, ანალიზური და ა.შ.) ასახვას

$$X \times G \rightarrow X \quad ((x, g) \mapsto xg)$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$1) \forall x \in X \quad \forall g, h \in G : x(gh) = (xg)h;$$

$$2) \forall x \in X : xe = x.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება მოქმედება მარცხნიდან G -სა X -ზე.

განსაზღვრება 1.3 : მთავარ P ფიბრაცია G სტრუქტურული ჯგუფით ეწოდება $P = (P_E, B, \pi, G)$ ოთხეულს, სადაც:

1) P_E, B -მრავალსახეობებია, G -ლის ჯგუფია, რომელიც მოქმედებს მარჯვნიდან P_E -ზე, $\pi : P_E \rightarrow B$ -სურექციული ასახვაა;

2) ყოველი $x \in B$ -სათვის არსებობს x -ის მიდამო $U \subset B$ და ჰომეომორფიზმი $f_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ ისეთი, რომ დიაგრამა

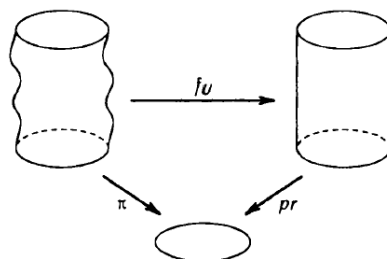
$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{f_U} & U \times G \\ & \searrow \pi & \swarrow pr \\ & U & \end{array}$$

(1.1)

კომუტაციურია და

$$f_U(\tilde{x}g) = f_U(\tilde{x})g \quad (f_U \text{ -ს ექვივარიანტულობა})$$

ყოველი $\tilde{x} \in \pi^{-1}(U)$, $g \in G$.



P_E სივრცეს უწოდებენ ფიბრაციის ტოტალურ სივრცეს, B - ფიბრაციის ბაზას, π - პროექციას, $\pi^{-1}(x) \cong G$ -ფიბრაციის ფენას. მეორე თვისება ნიშნავს, რომ P ლოკალურად ტრივიალურია.

თუ ყველა მრავალსახეობა და ასახვები, რომლებიც მონაწილეობენ ფიბრაციის განსაზღვრებაში უწყვეტია (გლუვია, ანალიზურია და ა.შ.), მაშინ ამბობენ, რომ P ტოპოლოგიური ფიბრაცია უწყვეტია (გლუვია, ანალიზურია და ა.შ.).

განსაზღვრება 1.4: ორ მთავარ ფიბრაციას P და $P' = (P'_E, B, \pi', G)$ ეწოდება ექვივალენტური, თუ არსებობს P_E -სა P'_E შორის ისეთი ექვივარიანტული ჰომეომორფიზმი f , რომ დიაგრამა

$$\begin{array}{ccc} P_E & \xrightarrow{f} & P'_E \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & B & \end{array}$$

(1.2)

კომუტაციურია. მთავარ ფიბრაციას ეწოდება ტრივიალური, თუ ის ექვივალენტურია პირდაპირი ნამრავლის.

ახლა დავიწყით კოორდინატური ფიბრაციის განხილვა. განვიხილოთ B ბაზის $\{U_i\}$ ისეთიდაფარვა, რომ ყოველ $\{U_i\}$ -ზე P ფიბრაცია იყოს ტრივიალური და განვიხილოთ P -ს ლოკალური ტრივიალიზაციები

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{lu} & U \times G \\ \pi \searrow & & \swarrow pr \\ & U & \end{array}$$

ამ მიდამოებზე (ე.ი. დავაფიქსირით f_{U_i} ჰომეომორფიზმები, რომლებსაც აღვნიშნავთ f_i -ით). ვთქვათ U_i, U_j არათანაუკვეთი მიდამოებია. განვიხილოთ კომუტაციური დიაგრამა

$$\begin{array}{ccccc} (U_i \cap U_j) \times G & \xleftarrow{h_i} & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{h_j} & (U_j \cap U_i) \times G \\ & \searrow pr & \downarrow \pi & \swarrow pr & \\ & & U_i \cap U_j & & \end{array}$$

(1.3)

ასახვას

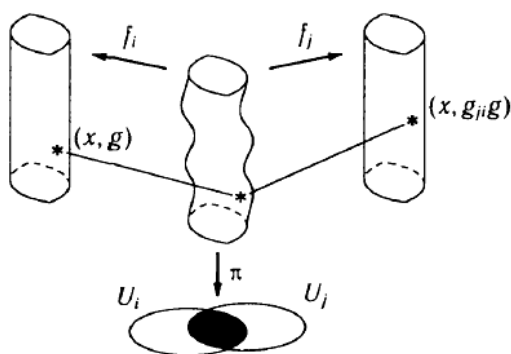
$$(1.4) \quad f_j \circ (f_i)^{-1} : (U_i \cap U_j) \times G \rightarrow (U_j \cap U_i) \times G$$

(x, e) წერტილი გადაჰყავს $(x, g^*(x))$ წერტილში. ასახვების ექვივარიანტურობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი x და g -სათვის ($x \in B, g \in G$) სამართლიანია თანადობა $(x, g) = (x, e)g \rightarrow (x, g^*(x))g = (x, g^*(x)g) \cdot g_j(x)$ -ით აღვნიშნოთ $g^*(x)$. ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ

$$(1.5) \quad f_j \circ (f_i)^{-1}(x, g) \equiv (x, g_{ji}(x)g) \text{ სადაც } g_{ji}: U_i \cap U_j \rightarrow G.$$

ამ ასახვის აგებიდან გამომდინარეობს, რომ $g_{ji}(x) = (g_{ji}(x))^{-1}$, ყოველი $x \in U_i \cap U_j$ (აქ g^{-1} - ით აღნიშნება G ჯგუფის ელემენტი რომლის შებრუნებული არის g) ვინაიდან $f_j \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f_j)^{-1} = id$ მართლაც

$$(x, g) = f_j \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f_j)^{-1}(x, g) = f_j \circ (f_i)^{-1}(x, g_{ij}g) = (x, g_{ji}g_{ij}g) \text{ რომ ყოველი } g - \text{სათვის, } g_{ji}(x)g_{ij}(x) \equiv e.$$



ვთქვათ სამ მიდამოს $U_i \cap U_j \cap U_k$ აქვს არაცარიელი თანაკვეთა, მაშინ თუ ყოველი წყვილისთვის განხილვით (1.3) ტიპის დიაგრამას და გავითვალისწინებთ იგივეობას $f_i \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f_k)^{-1} \circ f_k \circ (f_j)^{-1} = id$ ვივლიდებთ $g_{ji}(x)g_{kj}(x)g_{ik}(x) \equiv e$. მართლაც

$$(x, g) = f_i \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f_k)^{-1} \circ f_k \circ (f_j)^{-1}(x, g) = f_i \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f_k)^{-1}(x, g_{kj}g) = f_i \circ (f_i)^{-1}(x, g_{ik}g_{kj}g) = (x, g_{ji}g_{ik}g_{kj}g). \text{ საიდანაც გამომდინარეობს ზემოთ აღნიშნულ იგივეობა. ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი ლემის პირველი ნაწილი.}$$

ლემა 1: P მთავარი ფიბრაციაა, $U_i - B$ ბაზის დაფარვაა და P ფიბრაციის ფიქსირებული $\{f_i\}$ ტრიალიზაციით U_i -ზე, შეიძლება ავაგოთ (1.5) ასახვები რომლებსაც გააჩნია თვისებები

$$(1.6) \quad g_{ij}(x) \equiv (g_{ji}(x))^{-1}, \quad g_{ji}(x)g_{ik}(x)g_{kj}(x) \equiv e$$

და პირიქითაც, ნებისმიერი B მრავალსახეობის U_i დაფარვით და ნებისმიერი (1.5) ასახვებით, რომელთაც აქვთ (1.6) თვისება, შესაძლებელია აიგოს მთავარი $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_E, B, \pi', G)$ ფიბრაცია. თუ $\{g_{ij}\}$ ასახვების ოჯახი იყო აგებული მთავარი P ფიბრაციით, მაშინ $\tilde{Q}$ და P იქნებიან ექვივალენტური.

დამტკიცება : დავამტკიცოთ ლემის მეორე ნაწილი. განვიხილოთ არაბმული გაერთიანება $Q = \coprod (U_i \times G)$ და ამ სიმრავლეზე შემოვიღოთ $\sim$ ექვივალენტობის მიმართება: თუ $x \in U_i \cap U_j$, მაშინ:

$$(x, g) \sim (x, g_{ji}(x)g) \quad \text{როცა } (x, g) \in (U_i \times G), (x, g_{ji}(x)g) \in (U_i \times G),$$

$$(x, g) \sim (x, g) \quad \text{ნებისმიერი } x \in U_i, g \in G.$$

(1.6) თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ეს არის ექვივალენტობის მიმართება.

$\tilde{Q}_E$ -თი აღვნიშნოთ $Q / \sim$ მრავალსახეობა, ხოლო $\langle x, g \rangle$ -ით $\tilde{Q}_E$ წერტილი ((x, g) წყვილის ექვივალენტობის კლასი). განსაზღვროთ G ჯგუფის მოქმედება $\tilde{Q}_E$ -ზე ფორმულით $\langle x, g \rangle h = \langle x, gh \rangle$, ხოლო ასახვა $\tilde{\pi} : \tilde{Q}_E \rightarrow B$ თანადობით $\tilde{\pi}(\langle x, g \rangle) = x$. ადვილია იმის შემოწმება, რომ ოთხეული $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_E, B, \tilde{\pi}, G)$ წარმოადგენს მთავარ ფიბრაციას G ჯგუფის სტრუქტურით.

თუ (1.5) ასახვები აგებულია P ფიბრაციის $\{f_i\}$ ფიქსირებული ლოკალური ტრივიალიზაციებით, მაშინ P და $\tilde{Q}$ ფიბრაციების ექვივალენტურობა დგინდება $f : \tilde{Q}_E \rightarrow P_E$ ჰომომორფიზმის დახმარებით, სადაც f ემთხვევა f^{-1} -ს $U_i \times G$ სიმრავლეზე. ვაჩვენოთ ასახვის კორექტულობა. ამისათვის საჭიროა, რომ f_i^{-1} და f_j^{-1} ერთმანეთს ემთხვევიან საერთო განსაზღვრის არეზე. მართლაც, თუ $x \in U_i \cap U_j$, $(x, g) \in U_i \times G$, მაშინ აგების ძალით (x, g) და $(x, g_{ij}g)$ განსაზღვრავენ ერთი და იმავე წერტილს $(x, g) \in \tilde{Q}_E$ და (1.4) თანახმად

$$f_i^{-1}(x, g) = f_j^{-1} \circ f_j \circ f_i^{-1}(x, g) = f_j^{-1}(x, g_{ij}g).$$

f ასახვის ექვივარიანტულობა და (1.2) დიაგრამის კომუტაციურობა გამომდინარეობს აგებიდან. ამრიგად ლემა დამტკიცებულია.

$\{g_{ji}\}$ ასახვების ოჯახს უწოდებენ P ფიბრაციის შეწეპების კოციკლს. მართლაც, ამ ერთობლიობის დახმარებით P ფიბრაცია „წებდება“ სტანდარტული $U_i \times G$ „აგურებით“.

$\{g_{ji}\}$ ფუნქციებს ასევე უწოდებენ გადასვლის ფუნქციებს.

შეწეპების კოციკლი ცალსახათ არ განისაზღვრება ფიბრაციით. ის დამოკიდებულია დაფარვების და $\{f_i\}$ ლოკალური ტრივიალიზაციების არჩევებზე. უკანასკნელი დამოკიდებულება განვიხილოთ უფრო დაწვრილებით. ვთქვათ $f_U, f'_U - P$ ფიბრაციის სხვადასხვა ტრივიალიზაციაა U -ზე. განვიხილოთ დიაგრამა

$$\begin{array}{ccccc}
 U \times G & \xleftarrow{f_U} & \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{f_U} & U \times G \\
 & \searrow pr & \downarrow \pi & \swarrow pr & \\
 & & U & &
 \end{array}$$

(1.7)

ასახვა

$$(1.8) \quad f_U \circ (f'_U)^{-1} : U \times G \rightarrow U \times G$$

(x, e) წერტილს გადაჰყავს $(x, h_U(x))$ წერტილში. ამ სახვის ეკვივარიანტულობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $x \in U$, $g \in G$ სამართლიანია თანაფარდობა $(x, g) = (x, e)g \rightarrow (x, h_U(x))g = (x, h_U(x)g)$. ამრიგად ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $f_U \circ (f'_U)^{-1}(x, g) \equiv (x, h_U(x)g)$, სადაც $h_U : U \rightarrow G$.

ვინაიდან $f'_U \circ (f'_U)^{-1} \circ f_U \circ (f'_U)^{-1} = id$. ასევე მტკიცდება, რომ $f'_U \circ (f'_U)^{-1}(x, g) = (x, h_U^{-1}g)$. ვთქვათ U_i -ს და U_j მიდამოებს აქვთ არაცარიელი თანაკვეთა. f_U აღვნიშნოთ f_i -ით ხოლო h_{U_i} - h_i -ით და $f'_j \circ (f'_i)^{-1} = f'_j \circ (f_j)^{-1} \circ f_j \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f'_i)^{-1}$, იგივეობის გამოყენებით მივიღებთ $g'_{ji} = h_j^{-1}g_{ji}h_i$, სადაც $\{g'_{ji}\}$ აღნიშნავს შეწყვეტის კოციკლს, რომელიც შეესაბამება $\{f'_i\}$ ლოკალური ტრივიალიზაციის P ფიბრაციის. მართლაც, ყოველი $x \in U_i \cap U_j$, $g \in G$ მივიღებთ

$$\begin{aligned}
 (x, g'_{ji}g) &= f'_j \circ (f'_i)^{-1}(x, g) = f'_j \circ (f_j)^{-1} \circ f_j \circ (f_i)^{-1} \circ f_i \circ (f'_i)^{-1}(x, g) = f'_i \circ (f_j)^{-1} \circ f_j \circ (f_i)^{-1}(x, h_i g) = \\
 &= f'_j \circ (f_j)^{-1}(x, g_{ji}h_i g) = (x, h_j^{-1}g_{ji}h_i g), \text{ საიდანაც გამომდინარეობს მოთხოვნილი ტოლობა.}
 \end{aligned}$$

განსაზღვრება 1.5: კოციკლებს $\{g_{ji}\}, \{g'_{ji}\}$, რომლებიც შესაბამეა B მრავალსახეობის

$\{U_i\}$ დაფარვას, ეწოდება ექვივალენტური, თუ ყოველი U_i -სათვის არსებობს სახვა

$$h_i : U_i \rightarrow G \text{ ისეთი, რომ}$$

$$(1.10) \quad h_j(x)g'_{ji}(x) \equiv g_{ji}(x)h_i(x).$$

$(h_j g'_{ji}$ ქვემოთ იგულისხმება გამრავლება G ჯგუფში).

თეორემა 1.1: მთავარი ფიბრაციები

$$P = (P_E, B, \pi, G) \text{ და } P' = (P'_E, B, \pi', G)$$

ექვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ ფიბრაციების შეწყვეტის კოციკლები $\{g_{ji}\}, \{g'_{ji}\}$, რომელიც შეესაბამება რომელიღაც B ბაზას, ექვივალენტურია.

დამტკიცება : თუ P და P' ფიბრაციები ექვივალენტურია და $\{U_i\}, \{f_i\}$ - P ფიბრაციის ტრივიალიზაცია საკმარისად წვრილი $\{U_i\}$ დაფარვით და $\{g_{ji}\}$ შეწყობების კოციკლით, მაშინ P' ფიბრაციის ტრივიალიზაციის როლში შეიძლება ავარჩიოთ იგივე დაფარვა $\{f_i\}$ ასახვებით და $\{g'_{ji}\}$ კოციკლებით. h_i ასახვები განისაზღვრება შემდეგნაირად: $h_i = f_i \circ f^{-1} \circ (f'_i)^{-1}$, სადაც f არის (1.2)-დან. საკმარისობის შემდგომი დამტკიცება თითქმის სიტყვასიტყვით იმეორებს (1.10) ფორმულის გამოყენებას.

ვთქვათ P და P' -ორი ფიბრაცია $\{U_i\}, \{f_i\}$ და $\{U_i\}, \{f'_i\}$ ტრივიალიზაციებით და ექვივალენტური $\{g_{ji}\}$ და $\{g'_{ji}\}$ კოციკლებით. გავაკეთოთ ისე, როგორც ლემმა 1.1-ში, ავავსოთ $\{g_{ji}\}$ კოციკლით $\tilde{Q}$ ფიბრაცია ექვივალენტური P -სა და $\{g'_{ji}\}$ - $\tilde{Q}'$ ფიბრაცია, რომელიც ექვივალენტურია P' . თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\tilde{Q}$ და $\tilde{Q}'$ ექვივალენტური ფიბრაციებია. ავავსოთ ასახვა $\tilde{f} : \tilde{Q}'_E \rightarrow \tilde{Q}_E$ შემდეგნაირად.

ყოველ $U_i \times G$ -ზე განვიხილოთ ასახვა $\tilde{f}_i : (x, g) \rightarrow (x, h_i(x)g)$. ვაჩვენოთ, რომ $\{\tilde{f}_i\}$ ფუნქციების ოჯახი კორექტულად განსაზღვრავს ასახვას $\tilde{f} : \tilde{Q}'_E \rightarrow \tilde{Q}_E$. ამისათვის საკმარისია შევამოწმოთ, რომ ყოველი $x \in U_i \cap U_j, (x, g)$ და $(x, g_{ji}g)$ წერტილები, რომლებიც განსაზღვრავენ ერთი და იმავე წერტილს $\tilde{Q}'_E$ -ში, აისახებიან შესაბამისად (x, g^*) და (x, g') წერტილებში, რომლებიც განსაზღვრავენ ერთი და იმავე წერტილს $\tilde{Q}_E$ -ში, ე.ი. უნდა შემოწმდეს $g_{ji}g^* = g'$ ტოლობა. მაგრამ აგების თანახმად $g^* = h_i g$, $g' = h_j g'_{ji} g$ და (1.10)-დან მივიღებთ $g_{ji}g^* = g_{ji}h_i g = h_j g'_{ji} g = g'$. ამრიგად $\tilde{f}$ კორექტულობა დამტკიცდა. მარტივია იმის შემოწმება, რომ ასახვა მართლა გვამღევს $\tilde{Q}'$ და $\tilde{Q}$ ფიბრაციების ექვივალენტურობას.

შედეგი 1.1: მთავარი $P = (P_E, B, \pi, G)$ ფიბრაცია $\{g_{ji}\}$ შეწყობების კოციკლით ტრივიალურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი U_i -სათვის არსებობს ასხვა $h_i : U_i \rightarrow G$ ისეთი, რომ

$$(1.11) \quad h_j(x) \equiv g_{ji}(x)h_i(x)$$

ვთქვათ P ტრივიარული ფიბრაციაა, კვლავ განვიხილოთ ლემმა 1.1-ის კონსტრუქცია. თუ $x \in U_i \cap U_j$, მაშინ ყოველი $g \in G$, $(x, g) \in U_i \times G$ და $(x, g_{ji}g) \in U_j \times G$ წერტილები განსაზღვრავენ ერთსა და იმავე $\langle x, g \rangle \in \tilde{Q}_E$ წერტილს. ამიტომ (1.11)ძალით $\{s_i\}$,

$s_i : U_i \rightarrow U_i \times G$ ასახვების ოჯახი, სადაც $s_i(x) = (x, h_i(x))$, კორექტულად განსაზღვრავს $\tilde{s} : B \rightarrow \tilde{Q}_E$ ასახვას, რომლისთვისაც $pr \circ \tilde{s} = id$. მაშასადამე $\tilde{Q}$ და P ფიბრაციები ექვივალენტურები არიან და ამ ექვივალენტურობას ახორციელებს f ასახვა (იხილე ლემმა 1.1), მაშინ $s : B \rightarrow P_E$ ასახვა, სადაც $s = f \circ \tilde{s}$, გააჩნიათ ის თვისება, რომ $\pi \circ s = id$.

განსაზღვრება 1.6 : ისეთ უწყვეტ (გლუვ, ანალიზურ და ა.შ.) ასახვას $s : B \rightarrow P_E$, რომ $\pi \circ s = id$, ეწოდება P ფიბრაციის უწყვეტი (გლუვ, ანალიზურ და ა.შ.) კვეთა.

წინადადება 1.1 : P მთავარ ფიბრაცია ტრივიარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას გააჩნია კვეთა.

დამტკიცება: აუცილებლობა დამტკიცებულია შეწეპების კოციკლის ტერმინებში. ახლა უშუალოდ დავამტკიცოთ ტრივიარული ფიბრაციის განსაზღვრებიდან. ვინაიდან პირდაპირი ნამრავლს

$$P' = (B \times G, B, pr, G)$$

ყოველთვის გააჩნია ერთეულოვანი $x \rightarrow (x, e)$ კვეთა, მაშინ P ტრივიარულ ფიბრაციას აქვს $s(x) = f^{-1}(x, e)$ კვეთა, სადაც P და P' -ის ექვივალენტურობას ახორციელებს f ჰომომორფიზმი.

საკმარისობა : ვთქვათ $s : B \rightarrow P_E - P$ ფიბრაციის კვეთაა. ყოველი $x \in B$, $\pi^{-1}(x)$ შრე G ჯგუფის ჰომომორფულია. გავაიგივეოთ ეს ორი მრავალსახეობა და ნებისმიერი $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x) \cong G$ განვიხილოთ $g(\tilde{x}) = \tilde{x} \cdot (s(\pi(\tilde{x})))^{-1}$ ელემენტი, სადაც „ $\cdot$ “ სიმბოლოს ქვეშ გაიგება გამრავლება G ჯგუფში. ასე განსაზღვრული $g(\tilde{x})$ ელემენტი არ არის დამოკიდებული $\pi^{-1}(x)$ და G -ს გაიგივებებზე. პირდაპირი ნამრავლისა და P ფიბრაციის ექვივალენტურობა მყარდება $f : P_E \rightarrow B \times G$ ჰომომორფიზმით, სადაც $f(\tilde{x}) = (\pi(\tilde{x}), g(\tilde{x}))$.

§2. ვექტორული ფიბრაციის ცნება

ვექტორული ფიბრაციის განსაზღვრება გავს მთავარი ფიბრაციის განსაზღვრებას. განსხვავება იმაშია, რომ „სტანდარტული აგურების“ მაგივრად გამოიყენება, მრავალსახეობის მიდამოების, პირდაპირი ნამრავლი ევკლიდურ სივრცეზე, სადაც მოქმედებს წრფივი გარდაქმნის ჯგუფი.

განსაზღვრება 2.1 : F ვექტორულ (ნამდვილ) ფიბრაციის p რანგი ეწოდება სამეულს $F = (F_E, B, \tilde{\pi})$, სადაც:

- 1) F_E, B - მრავალსახეობებია, $\tilde{\pi} : F_E \rightarrow B$ - სურექციული ასახვა;
- 2) ყოველი $x \in B$, $\tilde{\pi}^{-1}(x)$ სიმრავლე წარმოადგენს წრფივ სივრცეს;
- 3) ყოველი $x \in B$ არსებობს x წერტილის $U \subset B$ მიდამო და $\tilde{f}_U : \tilde{\pi}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^p$ ჰომეომორფიზმი ისეთი, რომ დიაგრამა

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\pi}^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{f}_U} & U \times \mathbb{R}^p \\ & \searrow \tilde{\pi} & \swarrow pr \\ & U & \end{array}$$

(2.1)

კომუტაციურია და ასახვა

$$\tilde{f}_U^x : \tilde{\pi}^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

სადაც $\tilde{f}_U^x$ აღინიშნება $\tilde{f}_U$ ასახვის შეზღუდვა $\tilde{\pi}^{-1}(x)$ შრეზე, წარმოადგენს წრფივი სივრცეების იზომორფიზმს.

F_E უწოდებენ ფიბრაციის ტოტალურ სივრცეს, B - ფიბრაციის ბაზას, $\tilde{\pi}$ -პროექციას, $\tilde{\pi}^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^p$ - ფიბრაციის შრეს. მე-3 თვისება ნიშნავს, რომ F ლოკალურად ტრივიალურია. თუ ყველა მრავალსახეობა და ასახვები, რომლებიც მონაწილეობენ ფიბრაციის განსაზღვრებაში უწყვეტია (გლუვია, ანალიზურია და ა.შ.), მაშინ ამბობენ, რომ F ტოპოლოგიურ ფიბრაცია უწყვეტია (გლუვია, ანალიზურია და ა.შ.).

ყოველ მთავარ ფიბრაციაზე, $GL(p, \mathbb{R})$ სტრუქტურული ჯგუფით, შეიძლება აიგოს ვექტორული ფიბრაცია შემდეგნაირად.

განვიხილოთ მთავარი ფიბრაცია $P = P(P_E, B, \pi, GL(p, R))$. F_E -თი აღვნიშნოთ $P_E \times R^p / \sim$ სივრცე, სადაც

$$(\tilde{x}g, v) \sim (\tilde{x}, gv) \text{ ყოველი } \tilde{x} \in P_E, g \in GL(p, R), v \in R^p.$$

(შევნიშნოთ, რომ $GL(p, R)$ ჯგუფი P_E -ზე მოქმედებს მარჯვნიდან, ხოლო R^p -ზე მარცხნიდან). F_E სივრცის ელემენტებს აღვნიშნავთ $\langle x, v \rangle$ -ით, $\tilde{\pi} : F_E \rightarrow B$ ასახვა განვსაზღვროთ ტოლობით: $\tilde{\pi}(\langle \tilde{x}, v \rangle) = \pi(\tilde{x})$.

ლემა 2.2: სამეული $F = (F_E, B, \pi)$ არის p რანგის ფიბრაცია.

დამტკიცება: ვინაიდან

$$(GL(p, R) \times R^p / \sim) \cong R^p$$

(ჰომომორფიზმს ამ სივრცეებს შორის ამყარებს ასახვა $\langle g, v \rangle \rightarrow gv$), მაშინ (1.1) დიაგრამა, $\pi^{-1}(U)$ და $GL(p, R)$ სივრცეების R^p -ზე გამრავლების შემდეგ და ექვივალენტობის მიმართების აღებით, მიიღებს (2.1) სახეს:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) \times R^p / \sim & \xrightarrow{\tilde{f}_U} & (U \times GL(p, R)) \times R^p / \sim \\ & \searrow \tilde{\pi} & \swarrow pr \\ & U & \end{array}$$

სადაც $\tilde{f}_U(\langle \tilde{x}, v \rangle) := \langle f_U(x), v \rangle$.

განსაზღვრება 2.2: ზემოთ აგებულ ფიბრაციას ეწოდება ასოცირებული მთავარი საწყისი ფიბრაციით.

ვექტორული ფიბრაციების ექვივალენტურობა განისაზღვრება მესგავსად როგორც მთავარი ფიბრაციების ექვივალენტურობა.

განსაზღვრება 2.3: ორ F და $F' = (F'_E, B, \tilde{\pi}')$ ვექტორულ ფიბრაციას ეწოდება ექვივალენტური, თუ არსებობს ისეთი $\tilde{f}$ ჰომომორფიზმი F_E და F'_E შორის ისეთი, რომ დიაგრამა

$$\begin{array}{ccc} F_E & \xrightarrow{\tilde{f}} & F'_E \\ & \searrow \tilde{\pi} & \swarrow \tilde{\pi}' \\ & B & \end{array}$$

(2.3)

კომპუტაციურია და $\tilde{f}|_{\tilde{\pi}^{-1}(x)}$ ასახვა არის წრფივი სივრცეების იზომორფიზმი, ნებისმიერი $x \in B$ -სათვის. ვექტორული ფიბრაციას ეწოდება ტრივიალური, თუ ის პირდაპირი ნამრავლის ექვივალენტურია.

ახლა გადავიდეთ ვექტორული ფიბრაციის კოორდინატურ აღწერაზე. განვიხილოთ B ბაზის ისეთი $\{U_i\}$ დაფარვა, რომ ყოველ U_i -ზე F ფიბრაცია ტრივიალურია და F ფიბრაციის (2.1) ლოკალური ტრივიალიზაციებამ მიდამოებზე (ე.ი. დავაფიქსიროდ $\tilde{f}_{U_i}$ ჰომომორფიზმი, რომლებსაც ჩვენ აღვნიშნავთ $\tilde{f}_i$ -თი)

ვთქვათ U_i, U_j მიდამოებს აქვთ არაცარიელი თანკვეთა. განვიხილოთ კომპუტაციური დაიგრამა:

$$\begin{array}{ccc}
 (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^p & \xleftarrow{\tilde{f}_i} \tilde{\pi}^{-1}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\tilde{f}_j} & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^p \\
 & \searrow \rho_i \quad \downarrow \tilde{\pi} \quad \swarrow \rho_j & \\
 & U_i \cap U_j &
 \end{array}
 \quad (2.4)$$

ასახვა

$$(2.5) \quad \tilde{f}_j^x \circ (\tilde{f}_i^x)^{-1} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

ყოველი $x \in U_i \cap U_j$ -სთვის, არის წრფივი $\mathbb{R}^p$ სივრცის ავტომორფიზმი და მაშასადამე ის მოიცემა რომელიმე მატრიცით $g_{ji}(x)$. ამრიგად ნებისმიერი U_i, U_j -სათვის, რომლებიც აქვთ არაცარიელი თანკვეთა, განისაზღვრება ასახვით

$$(2.6) \quad g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(p, \mathbb{R})$$

ამ ასახვების კონსტრუქციიდან, ზუსტად ისე როგორც მთავარ ფიბრაციის შემთხვევაში, (იხილე (1.6) თანადობა) მარტივად გამოდინარეობს, რომ $g_{ij}(x) \equiv (g_{ji}(x))^{-1}$ ყოველი $x \in U_i \cap U_j$ (g^{-1} აღნიშნავს g მატრიცის შებრუნებულს). თუ სამ მიდამოს U_i, U_j, U_k აქვთ არაცარიელი თანკვეთა, მაშინ $g_{ji}(x)g_{ik}(x)g_{kj}(x) \equiv I$, სადაც I აღნიშნავს $(p \times p)$ ზომის ერთეულოვან მატრიცას.

ლემა 2.2 : F მთავარი ფიბრაციით, $U_i - B$ ბაზის დაფარვით და F ფიბრაციის ფიქსირებული $\{f_i\}$ ტრივიალიზაციით U_i -ზე, შეიძლება ავაგოთ (2.6) ასახვები რომლებსაც გააჩნია თვისებები

$$(1.6) \quad g_{ij}(x) \equiv (g_{ji}(x))^{-1}, \quad g_{ji}(x)g_{ik}(x)g_{kj}(x) \equiv I$$

და პირიქითაც, ნებისმიერი B მრავალსახეობის U_i დაფარვით და ნებისმიერი (2.6)ასახვებით, რომელთაც გააჩნია (2.7)თვისება, შესაძლებელია აიგოს მთავარი $F' = (F'_E, B, \tilde{\pi}')$ ფიბრაცია. თუ $\{g_{ji}\}$ ასახვების ოჯახი იყო აგებული მთავარი F ფიბრაციით, მაშინ F' და F იქნებიან ექვივალენტური.

დამტკიცება : (დამტკიცდება ანალოგიურად როგორც ლემა 1.1) განვიხილოთ არაბმული გაერთიანება $Q = \coprod(U_i \times G)$ და ამ სიმრავლეზე შემოვიღოთ $\sim$ ექვივალენტობის მიმართება: თუ $x \in U_i \cap U_j$, მაშინ:

$$(x, v) \sim (x, g_{ji}(x)v) \quad \text{როცა } (x, v) \in (U_i \times R^p), (x, g_{ji}(x)v) \in (U_i \times R^p),$$

$$(x, v) \sim (x, v) \quad \text{ნებისმიერი } x \in U_i, g \in R^p.$$

(2.7)თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ეს არის ექვივალენტობის მიმართება.

F'_E -თი აღვნიშნოთ $\tilde{Q} / \sim$ მრავალსახეობა, ხოლო $\langle x, v \rangle$ -ით F'_E წერტილი $((x, v))$ წყვილის ექვივალენტობის კლასი). განსაზღვროთ ასახვა $\tilde{\pi}' : F'_E \rightarrow B$ თანადობით $\tilde{\pi}'(\langle x, v \rangle) = x$. ადვილია იმის შემოწმება, რომ ოთხეული $F' = (F'_E, B, \tilde{\pi}')$ წარმოადგენს მთავარ ფიბრაციას. თუ (2.6) ასახვები აგებულია F ფიბრაციის $\{f_i\}$ ფიქსირებული ლოკალური ტრივიალიზაციებით, მაშინ F და F' ფიბრაციების ექვივალენტურობა დგინდება $\tilde{f} : F_E \rightarrow F'_E$ ჰომომორფიზმის დახმარებით, სადაც $\tilde{f}$ ემთხვევა $\tilde{f}_i$ -ს $\tilde{\pi}^{-1}(U_i)$ სიმრავლეზე.

შედეგი 2.1: მთავარი ფიბრაცია და მასთან ასოცირებული ვექტორული ფიბრაცია განსაზღვრავს ერთსა და იმავე $\{g_{ji}\}$ შეწეპების კოციკლს.

დამტკიცება: კვლავ განვიხილოთ (2.2)დიაგრამა. ვინაიდან

$$\tilde{\pi}^{-1}(U_i \cap U_j) = \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \times R^p / \sim,$$

მაშინ ასოცირებული ვექტორული ფიბრაციის $\tilde{f}_i$ ტრივიალიზაციები, შეიძლება ავიღოთ შემდეგნაირად: $\tilde{f}_i(\langle \tilde{x}, v \rangle) = \langle f_i(\tilde{x}), v \rangle$. ვთქვათ $(\tilde{x}, v)$ არის $\langle \tilde{x}, v \rangle$ ექვივალენტობის კლასის წარმომადგენელი, ხოლო $((x, I), v) - \langle x, v \rangle \in ((U_i \cap U_j) \times GL(p, C)) \times R^p / \sim \cong (U_i \cap U_j) \times R^p$ წარმომადგენელი. მაშინ $\tilde{f}_j \circ (\tilde{f}_i)^{-1}(\langle x, v \rangle) = \langle f_j \circ f_i(x, I), v \rangle = \langle \langle x, g_{ji}(x) \rangle, v \rangle = \langle x, g_{ji}(x)v \rangle$.

მაშასადამე, $\tilde{f}_j^x \circ (\tilde{f}_i^x)^{-1}(v) = g_{ji}(x)v$ ყოველი ფიქსირებული x -სათვის და ნებისმიერი $v \in R^p$.

თეორემა 2.1: ვექტორული ფიბრაციები $F = (F_E, B, \tilde{\pi})$ და $F' = (F'_E, B', \tilde{\pi}')$ ექვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ ფიბრაციების შეწეპების კოციკლები $\{g_{ji}\}$, $\{g'_{ji}\}$, რომლებიც ეთანადება რომელიმე B ბაზის დაფარვას, ექვივალენტურებია ((2.5) განსაზღვრების აზრით).

თუ F ფიბრაცია F' პირდაპირი ნამრავლი ექვივალენტურია, მაშინ $\{g'_{ji}\}$ კოციკლი შეიძლება ავარჩიოთ ერთეულის ტოლი: $\{g'_{ji}\} = I$. ამიტომ თეორემა 2.1-დან მივიღებთ

შედეგი 2.2 : ვექტორული ფიბრაცია $F = (F_E, B, \tilde{\pi})$, $\{g_{ji}\}$ შეწეპების კოციკლით, ტრივიარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი U_i -სთვის არსებობს ასახვა $h_i : U_i \rightarrow GL(p, R)$, ისეთი რომ

$$(2.8) \quad h_j(x) \equiv g_{ji}(x)h_i(x).$$

h_i^l აღვნიშნოთ h_i მატრიცის მე- l სვეტი, მივიღებთ ასახვას

$$(2.9) \quad h_i^l : U_i \rightarrow R^p.$$

თუ F ფიბრაცია ტრივიარულია, მაშინ (2.8)-ის ძალით ვივიღებთ, რომ ასახვები $s^l : B \rightarrow F_E$, $l = 1, \dots, p$, კორექტულად არის განსაზღვრული, სადაც

$$s^l(x) = (\tilde{f}_i^x)^{-1}(x, h_i^l(x))$$

U_i -ზე. ცხადია, რომ $\tilde{\pi} \circ s^l = id$, ესე იგი ასახვა s^l არის F ფიბრაციის შრე ((1.6) განსაზღვრების აზრით, რომელშიც, ვექტორული ფიბრაციის შემთხვევაში, ფორმალურად უნდა შეიცვალოს P და P_E შესაბამისათ F და F_E -ზე). ამრიგად (1.11)-დან მივიღებთ

შედეგი 2.3 : F ვექტორული ფიბრაცია $\{g_{ji}\}$ შეწეპების კოციკლით გააჩნია კვეთა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი U_i -სთვის არსებობს ასახვა $s_i : U_i \rightarrow R^p$ ისეთი, რომ

$$(2.10) \quad s_j(x) \equiv g_{ji}(x)s_i(x).$$

(იმისდამიხედვით თუ როგორია s_i და g_{ji} ასახვები, უწყვეტი, ანალიზური ან გლუვი, შესაბამისად ამბობენ, რომ მოცემულია უწყვეტი, ანალიზური ან გლუვი კვეთა.)

წინადადება 2.1: p რანგის F ვექტორული ფიბრაცია ტრივიარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას გააჩნია წვფივად დამოუკიდებელი p კვეთა (უწყვეტი, გლუვი ან ანალიზური იმისდამიხედვით თუ როგორი ფიბრაცია), ბაზის ყოველ წერტილზე.

განვიხილოთ მაგალითი. თქვამთ მოცემულია B გლუვი მრავალსახეობის $\{U_i\}$ დაფარვა, $c_i = (U_i, \xi^i, R^p)$, $\xi^i: U_i \rightarrow R^p$ - რუქები. ყოველ U_i, U_j , რომელსაც აქვთ არაცარიელი თანაკვეთა, განსაზღვროთ ასახვა

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow GL(p, R), \quad g_{ij}(x): J_{\xi^j \circ (\xi^i)^{-1}}(\xi^i(x)),$$

სადაც $J_f((\partial f^\alpha / \partial x^\beta)) - f: R^p \rightarrow R^p$ ფუნქციის იაკობის მატრიცია. აგებული $\{U_i\}$ დაფარვით და მითითებული შეწეპების $\{g_{ji}\}$ კოცილით, ვექტორული ფიბრაციას უწოდებენ B მრავალსახეობის მხებ ფიბრაციასდა აღინიშნება τ_B -თი.

ვექტორული ფიბრაციას, აგებული იმავე დაფარვით და შეწეპების $\{g_{ji}^*\}$ კოციკლით, $g_{ji}^* = (g_{ji}^t(x))^{-1}$, ეწოდება B მრავალსახეობის კომხები ფიბრაცია და აღინიშნება τ_B^* -თი (სიმბოლო t აღნიშნავს ტრანსფონირების ოპერაციას).

(შევნიშნოთ, რომ ხშირ შემთხვევაში B მრავალსახეობის მხები ვექტორი x წერტილში, განისაზღვრება როგორც კლასი ექვივალენტური წყვილების (c_i, h^i) , სადაც c_i - რუქაა, $h^i \in R^p$, ხოლო ექვივალენტობის მომართება მოიცემა შემდეგი თანადობით $h^j = J_{\xi^j \circ (\xi^i)^{-1}}(\xi^i(x))h^i$.)

წინადადება 2.2: ნამდვილი და კომპლექსური მხები და კომხები, რიმანის სფეროს ფიბრაციის, არატრივიარულია.

განსაზღვრება 2.4: ვთქვათ p და q რანგის F და F' ფიბრაციები B -ზე, მოიცემა $\{U_i\}$ დაფარვით და შესაბამისად $\{g_{ij}\}$ და $\{g'_{ij}\}$ შეწეპების კოციკლებით. $p+q$ რანგის ფიბრაცია, რომელიც მოიცემა $\{g_{ij}^\oplus\}$ კოციკლით,

$$, \quad g_{ij}^{\oplus}(x) = \begin{pmatrix} g_{ij}(x) & 0 \\ 0 & g'_{ij}(x) \end{pmatrix},$$

ეწოდება F და F' ფიბრაციების პირდაპირი ჯამი და აღინიშნება $F \oplus F'$ -ით.

pq რანგის ვექტორულ ფიბრაციას, რომელიც მოიცემა $\{g_{ij}^{\otimes}\}$ კოციკლით, სადაც

$$g_{ij}^{\otimes} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(pq, R)$$

და მატრიცა $g_{ij}^{\otimes}(x)$ შედგება $H_{kl}(x)$ ბლოკებისგან, $k=1, \dots, q$, $l=1, \dots, q$,

$$H_{kl}(x) = \begin{pmatrix} h_{k1}(x)h'_{l1}(x) & \dots & h_{kp}(x)h'_{lp}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{k1}(x)h'_{ql}(x) & \dots & h_{kp}(x)h'_{ql}(x) \end{pmatrix}$$

($h_{kl}(x)$ და $h'_{kl}(x)$ - ელემენტებია შესაბამისად $\{g_{ij}\}$ და $\{g'_{ij}\}$ მატრიცების), ეწოდება F და F' ფიბრაციების ტენზორული ნამრავლი და აღინიშნება $F \otimes F'$. მატრიცას $g_{ij}^{\otimes}(x)$ უწოდებენ $\{g_{ij}\}$ და $\{g'_{ij}\}$ მატრიცების ტენზორულ ან კრონიკერის ნამრავლს.

F' ფიბრაციას ეწოდება F ფიბრაციის ქვეფიბრაცია, თუ რომელიმე B ბაზის $\{U_i\}$ დაფარვა და ამ ფიბრაციის შეწეპების $\{g_{ij}\}$ და $\{g'_{ij}\}$ კოციკლებით შესრულებულია თანაფარდობა

$$g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} g'_{ij}(x) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

§3. რიორლის კონსტრუქცია

ფიბრაციისაგების ანალოგიური კონსტრუქციაა, ვთქვათ მოცემულია რიმანის სფეროზე სასრული რაოდენობის წერტილები $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ და მონოდრომიის $G_1, G_2, \dots, G_n$ მატრიცები ე. ი. მოცემული ყოფილა წარმოდგენა :

$$\rho : \pi_1(\tilde{C} \setminus S, z_0) \rightarrow GL(p, C)$$

$$\rho(\gamma_i) = G_i \quad \forall i = 1 \dots n$$

სადაც γ_i არის წირი, რომლის საწყისი და საბოლოო წერტილია z_0 წერტილი და შემოუვლის მხოლოდ ერთ z_i წერტილს $\forall i = 1 \dots n$. განვიხილოთ მრავალსახეობა $X_n = \tilde{C} \setminus S$ და ამ მრავალსახეობის დაფარვა ბმული და ცალადბმული U ღია სიმრავლეებით. ავირჩიოთ ისეთი დაფარვა, რომ თუ ორი სიმრავლის თანაკვეთა, ამ დაფარვიდან, არაცარიელია მაშინ მათი თანაკვეთაც ბმული და ცალადბმულია. X_n სათვის ყოველთვის შესაძლებელია ესეთი სასრული დაფარვის მონახვა. თითოეული U_i ღია სიმრავლისათვის, მისგან ავირჩიოთ ერთი წერტილი და γ_i გზით შვეერთოთ ჩვენ მიერ არჩეული წერტილი z_0 წერტილთან. ეს გზები დავაფიქსიროთ. თუ $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ განვიხილოთ გზა, δ_{ij} დავარქვათ, რომელიც მდებარეობს სიმრავლეში $U_i \cup U_j$ და აერთებს γ_i და γ_j მარყუჟების ბოლოებს აერთებს. განვიხილოთ $\gamma_i \delta_{ij} \gamma_j^{-1}$ მარყუჟი. ამ მარყუჟს აქვს თავისი ჰომოტოპიის კლასი. $\rho(\gamma_i \delta_{ij} \gamma_j^{-1}) = g_{ij}$ გადაუგვარებელი მატრიცები. ფიქსირებული γ_i და γ_j გზებისათვის g_{ij} მატრიცა არ არის დამოკიდებული δ_{ij} -ზე, რადგან ცალადბმული სიმრავლეებია როგორც დამფარავი სიმრავლეები ასევე მათი თანაკვეთები.

$U_i \cap U_j$ ამ სიმრავლის თითოეულ ელემენტს შევუსაბამოთ g_{ij} მატრიცა. ესეთნაირად ჩვენ მივიღებთ მუდმივ ასახვას :

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(p, C)$$

აგებიდან გამომდინარეობს რომ $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ და რადგან $\delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{ki}$ ნულის ჰომოტოპიურია, ანუ z_0 წერტილში მოჭიმვადა, გამოვა $g_{ij} g_{jk} g_{ki} = 1$. ე. ი. g_{ij} ასახვები შეგვიძლია

განვიხილოთ როგორც გადასვლის ფუნქციები. ე. ი. ჩვენ ავაგეთ კოციკლები ე. ი. შეგვიძლია, ზოგადი კონსტრუქციის მიხედვით, ავაგოთ მთავარი ფიბრაცია.

თითოეული U_i დეკარტულად გადავამრავლოთ C^p ვექტორულ სივრცეზე. მივიღებთ "ცილინდრულ სვეტებს", რომლებიც ერთმანეთს დავაწებოთ შემდეგნაირად: თუ ორ სვეტს, რომლებიც U_i და U_j ღია სიმრავლეებს შეესაბამებიან და $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ მაშინ $U_i \cap U_j$ სიმრავლეზე, საერთო ნაწილზე, საჭიროა წერტილების გაიგეგვება, კერძოდ ვთქვათ $(z, v) \in U_i \cap U_j \times C^p$ მაშინ (z, v) ელემენტი გავაიგივოთ ელემენტთან $(z, g_{ij}v)$, თუ ყველა სვეტს ამგვარად შევამოწმებთ, მაშინ g_{ij} კოციკლების პირობა ($g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ და $g_{ij} g_{jk} g_{ki} = 1$) ნიშნავს რომ ესეთი დაწებება კორექტული იქნება და მიიღება რაღაც მრავალსახეობა F და ბუნებრივი პროექცია

$$\pi : F \rightarrow \tilde{C} \setminus S$$

და სამეული $(\pi, F, \tilde{C} \setminus S)$ იქნება p რანგის ვექტორული ფიბრაცია.

ვექტორული ფიბრაციაწარმოადგენს პირდაპირი (დეკარტული) ნამრავლისგანზოგადებას. თუ ზემოთ მოყვანილ კონსტრუქციაში ავიღებთ ერთ-ერთ კოციკლს (ე. ი. დაფარვის ყოველი ღია სიმრავლისათვის გვექნება ერთიდაიგივე g_{ij}), მაშინ მივიღებთ მრავალსახეობის (ბაზის) და ვექტორული სივრცის დეკარტულ ნამრავლს.

ჩვენს კონსტრუქციაში საქმეს ამარტივებს ის გარემოებები, რომ ვექტორული ფიბრაცია ავაგეთ მუდმივი კოციკლებით. ამ ფაქტს ჩვენ ქვემოთ გამოვიყენებთ.

ვთქვათ $s : \tilde{C} \setminus S \rightarrow F$ ასახვაკვეთაა (ე. ი. $\pi \circ s = id$), კვეთავექტორული ფუნქციის განზოგადებაა, მართლაც თუ U_i ღია სიმრავლის ფარგლებში ვრჩებით, s იქნება ფუნქცია U_i ზე მნიშვნელობებით $\tilde{C}$ -ში, მაგრამ ნამდვილი კვეთის შემთხვევაში მოგვიწევს ვექტორული ფუნქციების დაწებება გარკვეული კანონზომიერებით ყოველი U_i და U_j ღია სიმრავლეებისათვის, რომლებისთვისაც $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. თუ $\tilde{C}$ -ს სტანდარტულ ბაზისში ჩავწერთ s კვეთას, მაშინ ყოველ U_i -ში გვექნება მისი დამლა $\bar{y}_i = (y_i^1, y_i^2, \dots, y_i^p)$.

საზოგადოდ ფიბრაციის კვეთის დიფერენცირებადობა არატრივიალური საკითხია, მაგრამ ჩვენს შემთხვევაში ამას ადვილად მოევლება (g_{ij} -ს მუდმივობის გამო). ავიღოთ s კვეთა, U_i -ზე ჩავწეროთ იგი სტანდარტულ ბაზისში, ისევე როგორც ზემოთ. s ის დიფერენციალად ∇s გამოვაცხადოთ $\bar{y}_i$ ვექტორის დიფერენციალი $d\bar{y}_i$, $\nabla s \leftrightarrow d\bar{y}_i$.

მომდევნონაბიჯიათითოეული ესეთი დიფერენციალის დაწებება, (დიფერენციალიც აგრეთვე კვეთაა) ისე რომ იგი (გადაწებებული) გამოდგეს s გლობალური კვეთის დიფერენციალად. დაწებება კვლავ g_{ij} კოციკლების საშუალებით უნდა მოხდეს და უნდა შესრულდეს ტოლობა $\bar{y}_j = g_{ij} d\bar{y}_i$.

თუ ეს ტოლობა შესრულდა მაშინ s კვეთის ნაწილებისაგან შესაძლებელი იქნება გლობალური კვეთის მიღება, რომელიც კორექტულა განსაზღვრული დიფერენციალი იქნება. ე. ი. იმისათვის, რომ კვეთის დიფერენციალი ვიპოვოთ საჭიროა კვეთის დიფერენციალი ვიპოვოთ ლოკალურად, შემდეგ მიღებული შედეგები დავაწებოთ, ხოლო ბოლოს კი უნდა შევამოწმოთ აკმაყოფილებენ თუ არა ისინი დაწებების კორექტულობის პირობას. რადგან g_{ij} კოციკლები მუდმივებია, კორექტულობის პირობა მარტივად მოწმდება $g_{ij} d\bar{y}_j = d g_{ij}$ ტოლობის გამო საიდანაც გამოდის რომ g_{ij} კოციკლი კორექტულად აწებებს $d\bar{y}_i$ და $d\bar{y}_j$ დიფერენციალებს $U_i \cap U_j$ სიმრავლეზე :

$$g_{ij} d\bar{y}_j = d\bar{y}_i .$$

აღვნიშნოთ s კვეთის დიფერენციალი ∇s .

იმ კვეთებს, რომლებისთვისაც $\nabla s = 0$, ეწოდებათ ჰორიზონტალური კვეთები.

ჩვენი ფიბრაციისათვის კვეთების ჰორიზონტალურობა ნიშნავს $d\bar{y}^i = 0$ ტოლობის შესრულებას, ამრიგად მოცემულია ∇ ბმულობანიშნავს მოცემულია კვეთის დიფერენცირების წესი, რაც ჩვენი ფიბრაციის შემთხვევაში $d\bar{y}^i = 0$ დიფერენციალური განტოლების მოცემის ექვივალენტურია.

§ 4. წრფივდიფერენციალურ განტოლებათა სისტემების რიმანის სფეროზე

განვიხილოთ რიმანის სფეროზე წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y \quad (1)$$

სადაც $B(z)$ ცნობილი მატრიცული ფუნქციაა, ხოლო $y(z) = (y^1(z), y^2(z), \dots, y^n(z))$ უცნობი ვექტორული ფუნქციაა. $B(z)$ მატრიცული ფუნქცია ჰოლომორფულია $S = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ დისკრეტული სიმრავლის დამატებაზე, ხოლო $S \cap B(z)$ -ის განსაკუთრებულ წერტილთა სიმრავლეა. ასეთ შემთხვევაში ცნობილია რომ (1) სისტემას $z_0 \in X_m = CP^1 \setminus S$ წერტილის მირე U მიდამოში ყოველთვის აქვს n წრფივად დამოუკიდებელი $y_1(z), y_2(z), \dots, y_n(z)$ ამონახსნთა სისტემა, რომელიც გაგრძელებადია ნებისმიერი წირის გასწვრივ. თუ $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ ით აღვნიშნავთ შეკრულ მარტივ წირებს, რომლებიც იწყებიან და მთავრდებიან z_0 წერტილში, ერთხელ შემოუვლიან $a_1, a_2, \dots, a_m$ წერტილებს საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით და მთლიანად მდებარეობენ X_m მრავალსახეობაზე, მაშინ $Y = \{y_1(z), y_2(z), \dots, y_n(z)\}$ ამონახსნთა სისტემა გადავა სხვა $\tilde{Y}$ ამონახსნში, რომელიც Y -ს უკავშირდება ტოლობებით $Y = G_j \tilde{Y}$, სადაც $G_j, j = 1, \dots, m$ გადაუგვარებელი მუდმივი მატრიცებია. $G_j, j = 1, \dots, m$ მატრიცებს **მონოდრომიის მატრიცები** ეწოდებათ.

გლობალური თეორია. განვიხილოთ $\bar{C}$ გაფართოებულ კომპლექსურ სიბრტყეზე ∇ მერომორფული ბმულობით, p რანგის F ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაცია. ბმულობის განსაკუთრებული წერტილები აღვნიშნოთ $a_1, \dots, a_n$ -ით. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ეს წერტილები ∇ -სათვის რეგულარული განსაკუთრებული წერტილებია და რომ ∞ წერტილი არის ბმულობისათვის ჰოლომორფულობის წერტილი.

ყოველი $a_i, i = 1, \dots, m$ განსაკუთრებული წერტილისათვის განვიხილოთ ამ წერტილის მიდამო $\dot{O}$ და F ფიბრაციის რაიმე ტრივიალიზაცია $\dot{O}$ -ზე. ლოკალური კვეთების შესაბამის ბაზისში ∇ ბმულობა განსაზღვრავს დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y \quad (4.1)$$

სისტემას რეგულარული განსაკუთრებული a_i წერტილით.

მთელი წინა ლოკალური თეორია შეიძლება გამოყენებულ იქნას (4.1) სისტემის მიმართ, რომელიც განიხილება O_i წერტილის მიდამოში. შედეგად ჩვენ მივიღებთ

შესაბამის მატრიცებს ნორმირების, მაჩვენებლების და ა. შ. ახლა ყველა მათგანი დამოკიდებული იქნება i ინდექსზე და ჩვენ მათ აღვნიშნავთ Y_i (Y_e ნავლად) $U_i, A_i, E_i, \rho_i^j, \phi_i^j, \beta_i^j$.

A_i, E_i მატრიცები და $\rho_i^j, \phi_i^j, \beta_i^j$ რიხები არ არიან დამოკიდებულნი O_i -ზე ფიბრაციის ტრივიალიზაციის არჩევაზე, მაშინ როდესაც Y_i, U_i მატრიცები მარცხნიდან მრავლდება ჰოლომორფულად შებრუნებად მატრიცულ $\Gamma(z)$ ფუნქციაზე ჰოლომორფული კვეთების $(s_1, \dots, s_p)$ ლოკალური ბაზისიდან $(s_1, \dots, s_p)\Gamma^{-1}$ გადასვლისას. რიცხვებს $\{\beta_i^j\}$ ეწოდებათ ∇ ბმულობის მაჩვენებლები a_i წერტილში.

განვიხილოთ F ტრივიალური ფიბრაიის შემთხვევა. ამ ფიბრაიის გლობალური ჰოლომორფული კვეთების ბაზისში ∇ ბმულობა განსაზღვრავს განტოლებათა სისტემას

$$dy = \omega y \quad (4.2)$$

მთელს გაფართოებულ კომპლექსურ სიბრტყეში.

B_i აღვნიშნოთ ω მატრიცული დიფერენციალური 1-ფორმის ნაშთი a_i წერტილში. თუ სისტემა ფუქსის ტიპისაა, მაშინ $\omega = \sum_{i=1}^n B_i dz / (z - a_i)$ ფორმა ჰოლომორფულია რიმანის $\bar{C}$ მთელ სფეროზე და აქედან გამომდინარე მათი ჯამინულია, ამიტომ z კოორდინატთა სისტემაში ფუქსის ტიპის (4.2) სისტემა ღებულობს სახეს

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{z - a_i} \right) y, \quad \sum_{i=1}^n B_i = 0 \quad (4.3)$$

შემდეგი თეორემები აპრიორი აკავშირებს სისტემის ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელ ლოკალურ ლეველის ფილტრაციებს (უფრო ზუსტად ნაჩვენებებს) სხვადასხვა განსაკუთრებულ წერტილებში.

თეორემა 4.1 $a_1, \dots, a_n$ რეგულარული განსაკუთრებული წერტილების მქონე (4.1)

სისტემის ამონახსნთა X სივრცის ყველა მაჩვენებლების Σ ჯამი მთელი რიცხვია და არ აღმატება ნულს

$$\Sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \beta_i^j \leq 0 \quad (4.4)$$

სისტემა რეგულარული განსაკუთრებული წერტილებით არის ფუქსის ტიპის $\bar{C}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$\Sigma = 0, \quad (4.5)$$

დამტკიცება : ვთქვათ Y_j მატრიცა არის ფუნდამენტური მატრიცა, რომელიც შეესაბამება ლეველის ბაზისს. მაშინ $\det(Y_j) = d * \exp(\int \text{tr}(B(z))dz)$ ე.ი.

$$d \ln \det(Y_j) = \text{tr}(B(z)) dz. \det(Y_j) = A(z) * (z - a_j)^{\sum_{i=1}^p \beta_j^i + b_j} \quad \text{ე.ი.} \quad \text{res}_j((\text{tr}(B(z)))dz) = \sum_{i=1}^p \beta_j^i + b_j$$

$$\text{მაშინ} \quad \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^p \beta_j^i + b_j \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p \beta_j^i + \sum_{j=1}^n b_j = 0, \text{ აქ } b_j \geq 0 \quad \forall j=1 \dots n \quad \text{ე.ი.} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \beta_i^j \leq 0.$$

$$\text{ფუქსის სისტემის შემთხვევა კი ექვივალენტურია } b_j = 0 \quad \forall j=1 \dots n \quad \text{ე.ი.} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \beta_i^j = 0.$$

თეორემა 4.2 რიმანის სფეროზე $a_1, \dots, a_n$ განსაკუთრებული წერტილებით ფუქსის $u^{(p)} + q_1(z)u^{(p-1)} + \dots + q_p(z)u = 0$ დიფერენციალური განტოლების მაჩვენებლებისათვის სრულდება დამოკიდებულება (რომელსაც წოდებთ ფუქსის დამოკიდებულებას)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \beta_i^j = \frac{(n-2) * p * (p-1)}{2}. \quad (4.6)$$

დამტკიცება: $u^{(p)} + q_1(z)u^{(p-1)} + \dots + q_p(z)u = 0$ ამ განტოლებიდან შემდეგი

გარდაქმნებით მივაღწევთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე

$$x_1 = v, \quad x_2 = \prod_{j=1}^n (z - a_j) \frac{dv}{dz}, \quad x_3 = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^2 \frac{d^2 v}{dz^2}, \quad \dots \quad x_p = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{p-1} \frac{d^{p-1} v}{dz^{p-1}}$$

ფუნდამენტური მატრიცა იქნება ესეთი $Y(z) = \Gamma(z) * A(z)$ სადაც Γ -ს აქვს სახე

$$\Gamma(z) = \text{diag}(1, \prod_{j=1}^n (z - a_j), \prod_{j=1}^n (z - a_j)^2, \dots, \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{p-1}) \text{ და } A(z) \text{ ვრონსკის მატრიცაა}$$

და $A(z) = \Gamma_1(z) * \Gamma_2(z) * P(1/z)$ აქ $\Gamma_1(z) = \text{diag}(1, z^2, \bar{z}^3, \dots, z^{2*(p-1)})$ და $\Gamma_2(z)$ არის ქვედა სამკუთხა მატრიცა, რომელშიც მთავარი დიაგონალის გასწვრივ დგანან

რიცხვები $(-1)^i$, რაც შეეხება მატრიცას $P(1/z) = P(\xi/z) = z \cdot$ არის ვრონსკის მატრიცა და ე. ი.

$$P(\xi) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_p \\ \frac{de_1}{d\xi} & \frac{de_2}{d\xi} & \dots & \frac{de_p}{d\xi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^{p-1}e_1}{d\xi^{p-1}} & \frac{d^{p-1}e_2}{d\xi^{p-1}} & \dots & \frac{d^{p-1}e_p}{d\xi^{p-1}} \end{pmatrix}$$

ხოლო $\det(Y(z)) = \det(\Gamma(z) * \Gamma_1(z) * \Gamma_2(z) * P(1/z)) = z^M * L(z)$ და

$$M = (n-2) * (1+2+\dots+(p-1)) = \frac{(n-2) * p * (p-1)}{2} \text{ ე. ი. } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \beta_i^j = \frac{(n-2) * p * (p-1)}{2}.$$

განვიხილოთ კვლავ F ვექტორული ფიბრაცია ∇ მერომორფული ბმულობით, რიმანის სფეროზე რეგულარული განსაკუთრებული წერტილებით და (F, ∇) წყვილის რაიმე კოორდინატული აღწერით $(\{U_i\}, \{f_{ij}\}, \{g_{ij}\}, \{\omega^i\})$.

განსაზღვრება 4.1 F ფიბრაციის $c_1(F)$ ხარისხი ეწოდება $|F|$ დეტერმინანტული ფიბრაციის $|\nabla|$ ბმულობის ნაშთთა ჯამს, სადაც დეტერმინანტულ ფიბრაციაში იგულისხმება ერთგანზომილებიანი ფიბრაცია კოციკლით $\{\det g_{ij}\}$, ხოლო $|\nabla|$ ბმულობა არის ბმულობა $|F|$ -ის ბმულობის $\{tr \omega^i\}$ ფორმით.

შედეგი 4.1 რიმანის სფეროზე F ვექტორულ ჰოლომორფულ ფიბრაციაში რეგულარული განსაკუთრებული წერტილებით ∇ მერომორფული ბმულობის მაჩვენებელთა Σ ჯამისათვის სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$\Sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \beta_i^j \leq c_1(F). \quad (4.7)$$

ბმულობა რეგულარული განსაკუთრებული წერტილებით წარმოადგენს ლოგარითმულს (ფუქსის ტიპის) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$\Sigma = c_1(F). \quad (4.8)$$

თეორემა 4.3: ნებისმიერი ვექტორული ჰოლომორფული ფიზრაცია F

რიმანის სფეროზე იშლება წრფივი ფიზრაციების პირდაპირჯამად $F \cong F(k_1) \oplus \dots \oplus F(k_p)$, $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p$ მთელი რიცხვებია, და თითოეული ფიზრაციის კოორდინატული აღწერა ესეთია $(C, \bar{C} \setminus \{0\}, z^k)$, $k_1, k_2, \dots, k_p$ რიცხვებს ეწოდებათ ფიზრაციის გახლეჩვის ტიპი.

§5. ალგორითმი

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{z - a_i} \right) y \quad a_1, \dots, a_n \text{ განსაკუთრებული წერტილებია (1).}$$

თეორემა 5.1(1) სისტემა რომ იყოს ფუქსის სისტემა განსაკუთრებულ წერტილში a_i აუცილებელია და საკმარისია რომ ამ განსაკუთრებული a_i წერტილის რომელიღაც მიდამოში შესაბამის ფუნდამენტურ მატრიცას იყოს ესეთი

$$Y_i(z) = U_i(z) * (z - a_i)^{A_i} * (z - a_i)^{E_i}$$

$U_i(z)$ არის ჰოლომორფულად შეზღუდვადი მატრიცა, A_i – დიგონალური მატრიცაა, რომლის დიაგონალებზეც დგანან მთელი $\lambda_1 \dots \lambda_p$ რიცხვები და ეგ მთელი რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$, ხოლო E_i – ზედა სამკუთხა მატრიცაა, რომლის საკუთრივი რიცხვებიც აკმაყოფილებენ პირობას $0 \leq \operatorname{Re}(\rho_i^j) < 1$.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\lambda_i^j = 0, \forall i=1 \dots n, \forall j=1 \dots p$ და დავწეროთ ალგორითმი, რომლის საშუალებითაც ჩვენ განვსაზღვრავთ ვექტორული ფუნქციის გახლეჩვის ტიპს:

განვიხილოთ $\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{z - a_i} \right) y$ განტოლებათა სისტემა და ამ სისტემის B_i მატრიცა. ამ

B_i მატრიცის საკუთრივი რიცხვები იყოს $\beta_1^1, \beta_1^2, \dots, \beta_1^p$, ხოლო $\varphi_1^1, \varphi_1^2, \dots, \varphi_1^p$ იყოს მთელი ნაწილები ამ საკუთრივი რიცხვების რეალური ნაწილებისა ე. ი. $\varphi_j^i = [\operatorname{Re}(\beta_j^i)]$.

დავუშვათ, რომ $\varphi_1^1 \neq 0$ და $\varphi_1^1 \geq 1$ ($\varphi_1^1 \leq -1$ ეს შემთხვევაც ანალოგიურად განიხილება) განვიხილოთ გარდაქმნა $y_1 = T_1 * y$, სადაც T_1 არის ისეთი მუდმივი გადაუგვარებელი მატრიცა, რომ ახალი სისტემის $B_1' = T_1 * B_1 * T_1^{-1}$ მატრიცა არის ნორმალური ჟორდანის ფორმის პირველი საკუთრივი რიცხვით β_1^1 და შესაბამისი ბლოკის განზომილებაა p_1 .

განვიხილოთ გარდაქმნა $y_2 = (z - a_1)^{D_1} * y_1$, რომელშიაც $D_1 = \operatorname{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_{p_1}, 0, \dots, 0)$

და $T_2(z) = (z - a_1)^{D_1}$. ამ გარდაქმნების შედეგად საწყისი განტოლებათა სისტემა გადავა განტოლებათა სისტემაში, რომელიც არის ფუქსის ტიპის $a_1, \dots, a_n$ წერტილებში და დამატებით აქვს წარმოსახვითი განსაკუთრებული წერტილი ∞ (ამ წერტილში განტოლებათა სისტემის ამონახსნს არ აქვს განშტოება). ამ გარდაქმნების შედეგად

მიღებული B_1'' მატრიცის საკუთრივი რიცხვები არიან $\beta_1^{p_1-1}, \dots, \beta_1^{p_1} - 1, \beta_1^{p_1+1}, \dots, \beta_1^p$

აღნიშნულ მოქმედებებს თუ ჩავატარებთ B_1 მატრიცის ნორმალური ჟორდანის ფორმის B_1' მატრიცის თითოეული ბლოკისათვის მივიღებთ სისტემას, რომელიც არის ფუქსის ტიპის $a_1, \dots, a_n$ წერტილებში, აქვს დამატებითი წარმოსახვითი განსაკუთრებული წერტილი ∞ , ხოლო $\tilde{B}_1$ მატრიცის საკუთრივი რიცხვები ისეთებია, რომ

$$\varphi_1^j = [\operatorname{Re}(\beta_1^j)] = 0 \quad \forall j=1 \dots p.$$

თუ ყველა დანარჩენი წერტილებისთვისაც ანალოგიურ მსჯელობებს ჩავატარებთ მივიღებთ სისტემას, რომელიც იქნება ფუქსის სისტემა $a_1, \dots, a_n$ წერტილებში და იქნება ერთი დამატებითი წარმოსახვითი განსაკუთრებული წერტილი ∞ , ხოლო გარდაქმნის მატრიცა იქნება მერომორფული $a_1, \dots, a_n$, და ჰოლომორფულად შებრუნებადი ამ წერტილებში და $T(z) = T_1(z) * \dots * T_n(z)$ სადაც I არის გარდაქმნების რაოდენობა. ამ $T(z)$ სათვის სამართლიანია შემდეგი თეორემა

თეორემა 5.2 ნებისმიერი მერომორფული $T(z)$ მატრიცული ფუნქციისათვის, რომელიც ჰოლომორფულად შებრუნებადია ნული წერტილის რომელიმე გაჩხვლევით მიდამოში არსებობს ჰოლომორფულად შებრუნებადი მატრიცული ფუნქცია $\Gamma(z)$ და არსებობს ჰოლომორფულად შებრუნებადი $U(z)$ მატრიცული ფუნქცია, ი. რ. სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\Gamma(z)T(z) = z^K U(z) \quad (1)$$

აქ $K = \operatorname{diag}(k_1, k_2, \dots, k_p)$ $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p$, ხოლო $U(z)$ არის მატრიცული ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ამ $\bar{C}$ სიმრავლეზე ∞ ამ ელემენტის მიდამოში. ამ $k_1, k_2, \dots, k_p$ რიცხვებისათვის სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 5.3 $k_1, k_2, \dots, k_p$ რიცხვები იმთხვევით ანექტორული ფიბრაციის კანონიკური გაგრძელების გახლეჩვის ტიპს.

დამტკიცება : ამ სიტუაციაში ყოველი განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში გვაქვს ტოლობა $Z(z) = U_i(z) * (z - a_i)^{E_i}$ ე. ი. $Z(z)$ შესაძლებელია განვიხილოთ როგორც

გადასვლის ფუნქცია $Z(z)=T(z)*Y(z)$ სადაც $Y(z)$ ფუნდამენტური მატრიცაა. (1) ამის გამო $z^K = \Gamma(z)*Z(z)*Y^{-1}(z)*U^{-1}(z)$.

სხვა შემთხვევაში : ვთქვათ არსებობს $T(z)$ მატრიცა ისეთი, რომ $\hat{y}(z) = T(z) * y(z)$ გარდაქმნით მიღებული ახალი სისტემა არის ფუქსის სისტემა $a_1, a_2, \dots, a_n$ წერტილებში, ყოველ თითოეულ წერტილში $\lambda^i = (\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^p, \text{მეცემულია, } \infty \text{ ეს წერტილი არის ახალი სისტემისათვის წარმოსახვითი განსაკუთრებული წერტილი, ამ შემთხვევის შესაბამისი } K \text{ მატრიცის შესახებ სამართლიანია}$

თეორემა 5.4 $k_1, k_2, \dots, k_p$ რიცხვები ემთხვევიან ვექტორული ფიზრაციის ერთერთი გაგრძელების გახლეჩვის ტიპს.

ამ შემთხვევაშიც მოვიყვანოთ ალგორითმი $T(z)$ მატრიცის აგებისა :

განვიხილოთ a_1 განსაკუთრებული წერტილი და $y_1 = T_1 * y$ ამ გარდაქმნით მივიღებთ ახალ სისტემას, რომლის B_1'' კოეფიციენტების მატრიცას აქვს ჟორდანის ნორმალური ფორმის სახე. ამ B_1'' მატრიცის დიაგონალი იყოს $(\underbrace{\eta_1, \dots, \eta_1}_{p_1}, \dots, \underbrace{\eta_m, \dots, \eta_m}_{p_m}),$ ხოლო $\lambda^1 = (\underbrace{\mu_1, \dots, \mu_1}_{q_1}, \dots, \underbrace{\mu_l, \dots, \mu_l}_{q_l}).$

1) ვთქვათ λ^1 ისა და B_1'' მატრიცის მთავარი დიაგონალის სტრუქტურა ერთმანეთს ემთხვევა, ე. ი. $p_i = q_i, m = l \quad \forall i = 1 \dots m(l).$

ვთქვათ $\phi_1^1 = \text{Re}(\eta_1) < \mu_1$. განვიხილოთ გარდაქმნა $y_2 = (z - a_1)^D * y_1$ სადაც

$D = \text{diag} \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{p_1}, 0, \dots, 0 \right)$ ამ გარდაქმნის მერე სისტემა გადავა სისტემაში,

რომელიც არის ფუქსის ტიპის $a_1, \dots, a_n$, წერტილებში, აქვს დამატებითი წარმოსახვითი განსაკუთრებული წერტილი ∞ (ამ წერტილში განტოლებათა სისტემის ამონახსნს არ აქვს განშტოება), ამიტომ B_1'' მატრიცის საკუთრივი რიცხვები იქნება $\eta_1 + 1, \eta_1 + 1, \dots, \eta_1 + 1, \eta_2, \dots, \eta_m$. (როცა $\phi_1^1 = \text{Re}(\eta_1) < \mu_1$, ამ

შემთხვევაში $D = \text{diag} \left(\underbrace{-1, \dots, -1}_{p_1}, 0, \dots, 0 \right)$) ესეთი მოქმედებების გარკვეულ

რაოდენობაჯერ გამეორების შემთხვევაში შესაძლებელია მივიღოთ, რომ $\varphi_1^1 = \varphi_2^1 = \dots = \varphi_{p_1}^1 = \mu_1$, ყოველ ჯერზე გარდაქმნის მატრიცა იქნება

$$D = \text{diag} \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{p_1}, 0, \dots, 0 \right) \text{ ეს მატრიცა, (ან } D = \text{diag} \left(\underbrace{-1, \dots, -1}_{p_1}, 0, \dots, 0 \right) \text{ ეს მატრიცა$$

). მიღებული ახალი სისტემა არის ფუქსის სისტემა $a_1, \dots, a_n$ წერტილებში და აქვს დამატებითი წარმოსახვითი განსაკუთრებული წერტილი ∞ . დანარჩენი წერტილებისთვისაც ანალოგიური მოქმედებების ჩატარების შემთხვევაში მივიღებთ ისეთივე ტოლობას შესაბამის წერტილებისათვის.

2) ვთქვათ არ ხდება 1) ე.ი. არსებობს i ისეთი, რომ $p_i \neq q_i$, ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ რომ $i=1$. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია ორი ვარიანტი $\varphi_1^1 = \text{Re}(\eta_1) < \mu_1$ ან $\varphi_1^1 = \text{Re}(\eta_1) > \mu_1$ სათითაოდ განვიხილოთ ორივე შემთხვევა.

2 ა) $\varphi_1^1 = \text{Re}(\eta_1) < \mu_1$:

განვიხილოთ გარდაქმნა $y_2 = (z - a_1)^D * y_1$ სადაც $D = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$. გარდაქმნამდე

$$B_1'' = \begin{pmatrix} \eta_1 & 1 & & & & & & & \\ & \cdot & \cdot & & & & & & \\ & & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & & & 0 \\ & & & & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & & \eta_1 & 1 & & \\ & & & & & \eta_1 & 0 & & \\ & & & & & & \eta_2 & * & \\ & & & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & & & * \\ & & & & & & & & & & \eta_m \end{pmatrix}$$

გარდაქმნის მერე

$$\tilde{B}_1'' = \begin{pmatrix} \eta_1+1 & 1 & & & & & \\ & \eta_1 & 1 & & & & \\ & & \cdot & \cdot & & & 0 \\ & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \eta_1 & 1 \\ & & & & & \eta_1 & 0 \\ & & & & & & \eta_2 & * \\ & 0 & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & \cdot & * \\ & & & & & & & & & \eta_m \end{pmatrix}$$

ე.ი. მატრიცის $\tilde{B}_1''$ საკუთრივი რიცხვები არის $\eta_1+1, \eta_1, \underbrace{\eta_1, \dots, \eta_1}_{p_1-1}, \eta_2, \dots, \eta_m$ და

მიღებული სისტემა არის ისევ ფუქსის სისტემა a_1 წერტილში.

2 ბ) $\varphi_1^1 = \operatorname{Re}(\eta_1) > \mu_1$:

ამ შემთხვევაშიც განვიხილოთ გარდაქმნა $y_2 = H * y_1$ სადაც $H = \operatorname{diag}(X(p_1), I(p-p_1))$,

$$X(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}_{s \times s}, \text{ ხოლო } I \text{ არის ერთეულოვანი მატრიცა}$$

ამ შემთხვევაში $D = \operatorname{diag}(-1, 0, \dots, 0)$ ეს მატრიცა არ გამოდგება, რადგან დაირღვევა ფუქსობა ამ a_1 წერტილში. ამ გარდაქმნის მერე მატრიცა იყო ესეთი

$$B_1'' = \begin{pmatrix} \eta_1 & 1 & & & & & & & \\ & \cdot & \cdot & & & & & & \\ & & \cdot & \cdot & & & & 0 & \\ & & & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & & \eta_1 & 1 & & & \\ & & & & \eta_1 & 0 & & & \\ & & & & & \eta_2 & * & & \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \\ & 0 & & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & & * \\ & & & & & & & & & \eta_m \end{pmatrix}$$

და გახდება ესეთი

$$\tilde{B}_1'' = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & & & & & & & \\ 1 & \eta_1 & 0 & & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & & 0 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & 1 & \eta_1 & 0 & & \\ & & & & & 1 & \eta_1 & 0 & \\ & & & & & & 0 & \eta_2 & * \\ & 0 & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & & \cdot & * \\ & & & & & & & & & & 0 & \eta_m \end{pmatrix},$$

ეხლა თუ გამოვიყენებთ გარდაქმნას $y_3 = (z - a_1)^D * y_2$ სადაც $D = \text{diag}(-1, 0, \dots, 0)$ ამ გარდაქმნის მერე $\tilde{B}_1''$ მატრიცა გადავა მატრიცაში

$$\tilde{B}_1'' = \begin{pmatrix} \eta_1 - 1 & & & & & & & & & & \\ & 0 & \eta_1 & 0 & & & & & & & \\ & & 1 & \eta_1 & 0 & & & & & 0 & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & & & 1 & \eta_1 & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & \eta_1 & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \eta_2 & * & \\ & & 0 & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & & & \cdot & \cdot & * \\ & & & & & & & & & & & 0 & \eta_m \end{pmatrix},$$

ამ შემთხვევაში მატრიცის $\tilde{B}_1''$ საკუთრივი რიცხვები არის $\eta_1 - 1, \eta_1, \underbrace{\eta_1, \dots, \eta_1}_{p_1 - 1}, \eta_2, \dots, \eta_m$

და მიღებული სისტემა არის ისევ ფუქსის სისტემა a_1 წერტილში.

დანარჩენი წერტილებისათვისაც თუ ანალოგიურად მოვიქცევით საბოლოოდ მივიღებთ ახალ სისტემას, რომელიც არის ფუქსის სისტემა $a_1, a_1, \dots, a_n$ წერტილებში და ეს წერტილი არის ახალი სისტემისათვის წარმოსახვითი განსაკუთრებული წერტილი.

3) თუ საწყისი სისტემისათვის ეს წერტილი არ არის ჰოლომორფულობის წერტილი, მაშინ

$$\sum_{i=1}^n B_i + B_0 = 0$$

განვიხილოთ წერტილი $a \in C \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ და წილად წრფივი ასახვა $w = 1/(z - a)$, მაშინ საწყისი სისტემა გადავა ესეთ სისტემაში

$$\frac{dy}{dw} = \left(\frac{B_0}{w} + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{w - (1/(a_i - a))} \right) y \quad (2)$$

თეორემა 5.5 $k_1, k_2, \dots, k_p$ რიცხვები ემთხვევიან ვექტორული ფიბრაციის ერთ-ერთი გაგრძელების გახლეჩვის ტიპს, რომელიც აგებულია (2) სისტემის მონოდრომიებისაგან.

მაგალითი1:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{B(z)}{z} y$$

როდესაც ფუქსის სისტემა არარეზონანსულია ნულ წერტილში მაშინ მონოდრომიის მატრიცას აქვს სახე $e^{2\pi i B(0)}$ კონკრეტული მაგალითისათვის გამოვთვალოთ მონოდრომიის მატრიცების მსგავსი მატრიცა matlab -ის საშუალებით.

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{1}{z} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6(z+1)} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2(z-1)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3(z-1/2)} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) y$$

განსაკუთრებული წერტილების რაოდენობა არის 4, ეს წერტილებია $s_1 = 0, s_2 = -1, s_3 = 1, s_4 = 1/2$. თითოეულ განსაკუთრებულ წერტილში მონოდრომიის მატრიცები:

$$G_j = e^{2\pi i B(S_j)}$$

სადაც S_j განსაკუთრებული წერტილია და G_j არის მონოდრომიის მატრიცის მსგავსი მატრიცა S_j წერტილში

$$\mathbf{s_1 = 0}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{z} y, \quad B(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1.0000 - 0.0000i & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 + 0.0000i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s_2 = -1}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{pmatrix} -1/6 & 1/6 \\ -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}}{z+1} y, \quad B(-1) = \begin{pmatrix} -0.1667 & 0.1667 \\ -0.1667 & 0.1667 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0.5000 - 0.8660i & 0.5000 + 0.8660i \\ 0.5000 - 0.8660i & 0.5000 + 0.8660i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s}_3 = \mathbf{1}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}{z-1} y, \quad B(1) = \begin{pmatrix} -0.5000 & -0.5000 \\ 0.5000 & 0.5000 \end{pmatrix}$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} -1.0000 - 0.0000i & -1.0000 - 0.0000i \\ -1.0000 + 0.0000i & -1.0000 + 0.0000i \end{pmatrix}$$

$$s_4 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}{z - 1/2} y, \quad B(1/2) = \begin{pmatrix} -0.3333 & 0.3333 \\ -0.3333 & 0.3333 \end{pmatrix}$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} -0.5000 - 0.8660i & -0.5000 + 0.8660i \\ -0.5000 - 0.8660i & -0.5000 + 0.8660i \end{pmatrix}$$

მაგალითი2:

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{1}{z} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{z+1} \begin{pmatrix} -1/8 & -1/16 \\ 1/16 & -1/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{z-1} \begin{pmatrix} -1/8 & -1/16 \\ 1/16 & -1/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{z+i} \begin{pmatrix} -1/8 & 1/16 \\ -1/16 & -1/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{z-i} \begin{pmatrix} -1/8 & 1/16 \\ -1/16 & -1/4 \end{pmatrix} \right) y$$

ამ სისტემის განსაკუთრებული წერტილების რაოდენობა არის 5 და ეს განსაკუთრებული წერტილებია $s_1=0, s_2=-1, s_3=1, s_4=-i, s_5=i$

$$s_1=0$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{z} y \quad B(0) = \begin{pmatrix} 0.5000 & 0 \\ 0 & 1.0000 \end{pmatrix} \text{ ხოლო}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} -1.0000 + 0.0000i & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0000 - 0.0000i \end{pmatrix}$$

$$s_2 = -1$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{pmatrix} -1/8 & -1/16 \\ 1/16 & -1/4 \end{pmatrix}}{z+1} y \quad B(-1) = \begin{pmatrix} -0.1250 & -0.0625 \\ 0.0625 & -0.2500 \end{pmatrix} \text{ ხოლო}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0.7071 - 0.7071i & 0.9239 - 0.3827i \\ 0.9239 + 0.3827i & 0.0000 - 1.0000i \end{pmatrix}$$

$$s_3 = 1$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{pmatrix} -1/8 & -1/16 \\ 1/16 & -1/4 \end{pmatrix}}{z-1} y \quad B(1) = \begin{pmatrix} -0.1250 & -0.0625 \\ 0.0625 & -0.2500 \end{pmatrix} \text{ ხოლო } \sim$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} 0.7071 - 0.7071i & 0.9239 - 0.3827i \\ 0.9239 + 0.3827i & 0.0000 - 1.0000i \end{pmatrix}$$

$$s_4 = -i$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{pmatrix} -1/8 & 1/16 \\ -1/16 & -1/4 \end{pmatrix}}{z+i} y \quad B(-i) = \begin{pmatrix} -0.1250 & 0.0625 \\ -0.0625 & -0.2500 \end{pmatrix} \text{ ხოლო}$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} 0.7071 - 0.7071i & 0.9239 + 0.3827i \\ 0.9239 - 0.3827i & 0.0000 - 1.0000i \end{pmatrix}$$

$$s_5 = i$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{pmatrix} -1/8 & 1/16 \\ -1/16 & -1/4 \end{pmatrix}}{z-i} y \quad B(i) = \begin{pmatrix} -0.1250 & 0.0625 \\ -0.0625 & -0.2500 \end{pmatrix} \text{ ხოლო}$$

$$G_5 = \begin{pmatrix} 0.7071 - 0.7071i & 0.9239 + 0.3827i \\ 0.9239 - 0.3827i & 0.0000 - 1.0000i \end{pmatrix}$$

სიბრტყეზე მოცემულია ნებისმიერი სამი წერტილი s_1, s_2, s_3 და სამიგადაუგვარებელი მატრიცა M_1, M_2, M_3 ისეთი, რომ $M_1 M_2 M_3 = I$. ავსაგოთფუქსისსისტემა, რომლის განსაკუთრებულიწერტილები იქნება ეს s_1, s_2, s_3 წერტილები და რომელთა მონოდრომიის მატრიცებიც იქნებიან ეს M_1, M_2, M_3 მატრიცა, ესეთი სისტემა ყოველთვის არსებობს

$$\frac{dF}{dz} = \left(\frac{A_1}{z-s_1} + \frac{A_2}{z-s_2} + \frac{A_3}{z-s_3} \right) F \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^3 A_i = 0$$

ავსაგოთ CP^1 -ზე $E \rightarrow CP^1$ ვექტორული ფიბრაცია $\rho: \pi_1(CP^1 \setminus \{s_1, s_2, s_3\}) \rightarrow GL(2, C)$

$\rho(\gamma_i) = M_i, i=1, 2, 3$ წარმოდგენით და (1) სისტემის საშუალებით (1) საშუალებით ხდებარაგარძელება) ცნობილია, რომ $E = E(k_1) \oplus E(k_2)$, ვიპოვოთ (k_1, k_2) მთელი რიცხვთა ვექტორი (გახლეჩვის ტიპი)

ვთქვათ $s_1 = 0, s_2 = 1, s_3 = \infty$, მაშინ გვაქვს ჰიპერგეომეტრიული განტოლება

$$f'' + \frac{(a+b+1)z-c}{z(z-1)} f' + \frac{ab}{z(z-1)} f = 0 \quad (2)$$

1) ჩავწეროთ ეს განტოლება კანონიკური სახით

2) ავსაგოთ ფიბრაცია CP^1 :

$$a) \rho: \pi_1(CP^1 \setminus \{0, 1\}) \rightarrow GL(2, C) \quad (3)$$

გვაქვს მონოდრომიის მატრიცების ჩაწერა a, b, c პარამეტრების საშუალებით

ბ) დავწეროთ ყოველი განსაკუთრებული წერტილისათვის ლეველის ბაზისში

ამონახსნი

გ) განვიხილოთ კანონიკური გაგრძელება $\tilde{E} \rightarrow C \setminus \{0, 1\}$ ტრივიალური ფიბრაციის

დ) მიღებული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპი (k_1, k_2) გამოისახება a, b, c პარამეტრების საშუალებით

დაუყვანადი წარმოდგენა. ვთქვათ (2) განტოლების (ან მისი შესაბამისი სისტემის)

(3) მონოდრომიის წარმოდგენა დაუყვანადია, ესეთ პირობებში სამართლიანია შემდეგი

თეორემა :

თეორემა მიღებული ფიბრაციის გახლეჩვის ტიპია ან $(k, k+1)$, ან (k, k) .

დამტკიცება :მართლაც, ამ შემთხვევაში $k_1 - k_2 < 1$, ეს ნიშნავს რომ ფიზიკა მდგრადია, ეს კიდე ნიშნავს რომ გახლეჩვის ტიპი არის $(k, k+1)$, ან (k, k) , ამასთან პირველ შემთხვევა იქნება მაშინ, როდესაც მიღებული ფიზიკის სრული ჩენის რიცხვი იქნება კენტი, ხოლო მეორე შემთხვევა კი იქნება მაშინ, როდესაც მიღებული ფიზიკის სრული ჩენის რიცხვი იქნება ლუწი. თუ a, b, c რიცხვების საშუალებით საშუალებით გვეცოდინება მიღებული ფიზიკის სრული ჩენის რიცხვი $c_1(E)$ და

(3) წარმოდგენის დაუყვანადობის პირობას ჩამოვაყალიბებთ a, b, c რიცხვების საშუალებით, მაშინ გახლეჩვის ტიპისათვის გვექნება ფორმულა

$$\left(\left[\frac{c_1(E)}{2} \right], \left[\frac{c_1(E)}{2} \right] + 1 \right) \text{ ან } \left(\left[\frac{c_1(E)}{2} \right], \left[\frac{c_1(E)}{2} \right] \right)$$

თეორემა ფუქსის ტიპის ნებისმიერი $u^{(p)}(z) + q_1(z)u^{(p-1)}(z) + \dots + q_p(z)u(z) = 0$

განტოლებისათვის არსებობს $df = \left(\sum \frac{A_j}{z - s_j} dz \right) f$ ფუქსის სისტემა იგივე მონოდრომიით

და განსაკუთრებული წერტილებით, აქ $q_j(z) = \frac{r_i(z)}{(z-s)^i}, i = 1, n$ სადაც $r_i(z)$

ჰოლომორფულია.

კერძოდ (2) განტოლების შესაბამისი ფუქსის სისტემა :

$$dF = \left(\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -ab & -c \end{pmatrix}}{z} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & c-(a+b) \end{pmatrix}}{z-1} \right) dz \cdot F$$

$$M_1 = \exp(2\pi i A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (\exp(2\pi abi))^{-1} & (\exp(2\pi ci))^{-1} \end{pmatrix} \text{ სადაც } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -ab & -c \end{pmatrix} \text{ ხოლო}$$

$$M_2 = \exp(2\pi i A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & (\exp(2\pi(a+b-c)i))^{-1} \end{pmatrix} \text{ სადაც } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & c-(a+b) \end{pmatrix}.$$

დასკვნა

ნაშრომის ძირითადი თეორემის თანახმად შესაძლებელია რიმანის სფეროზე ორგანოზომილებიანი ვექტორული ფიბრაციის სრული ანალიზური ინვარიანტის - გახლეჩვის ტიპის გამოთვლა მისი მერომორფული ბმულობის (დიფერენციალურ-გეომეტრიული) საშუალებით, როდესაც ბმულობის მონოდრომიის წარმოდგენა დაუყვანადია. ამ შედეგის მისაღებად გამოყენებულია ზოგადი კონსტრუქცია, რომლის მიხედვით ტრივიალური ვექტორული ფიბრაცია მერომორფული ბმულობით შესაძლებელია გაგრძელებული იქნას მთელ რიმანის სფეროზე. ის წერტილები, სადაც ფიბრაციის გაგრძელება ხდება, წარმოადგენენ მერომორფულ კოეფიციენტებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის პირველი რიგის პოლუსებს. ამ სისტემის ამონახსნის სპეციალური სახე ფიბრაციის გაგრძელების საშუალებას იძლევა სისტემის განსაკუთრებულ წერტილებში. ნაშრომში თანმიმდევრულად არის განხილული ყველა ეს საკითხი, განსაკუთრებული ყურადღება აქვს დათმობილი იმ საკითხებს, რომლებიც თანამედროვე სამეცნიერო ლიტერატურაში, ჩვენი აზრით, დამაკმაყოფილებლად არ არის გადმოცემული. მიღებული შედეგი შესაძლებელია განზოგადდეს ნებისმიერი მეორე რიგის განტოლებათა სისტემისათვის, რაც მომავალი კვლევებში იქნება ასახული.

გამოყენებული ლიტერატურა :

1. А.А.Болибрух. Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. *Москва, МЦНО, 2002*
2. А.А.Рябов. Типы расщеплений векторных расслоений, построенных по монодромии заданной фуксовой системы. *Журнал вычислительной математики математической физики, 2004, том 44, вып. 4, стр 679-684.*
3. Y. Sibuya. Linear differential equations in the complex domain. Problems of analytic continuation, *AMS, Transl. Math.Mon. Vol. 82, 1990*