ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

თეა შავაძე

# ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები ერთი კლასის სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისათვის

სამაგისტრო პროგრამა: მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამაგისტრო ნაშრომის ხელმძღვანელი: თამაზ თადუმაძე

ფიზიკა–მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,  პროფესორი

თბილისი 2016

# ს ა რ ჩ ე ვ ი

## ა ნ ო ტ ა ც ი ა

განხილულია სამართი დიფერენციალური განტოლება ორი მუდმივი დაგვიანებით ფაზურ კოორდინატებში. საწყისი მონაცემების ვარიაცის ახალი კლასის მიმართ დამტკიცებულია სამი ტიპის ვარიაციის ფორმულა, რომლებიც ცალ–ცალკე შეესაბამებიან შემთხვევებს, როცა საწყისი მომენტის ვარიაცია ხდება მარცხნიდან ან მარჯვნიდან ან ორივე მხრიდან. ვარიაციის ახალ კლასში იგულისხმება ის რომ საწყისი მომენტისა და დაგვიანების ვარიაციის ნიშნები შეიძლება ერთნაირი არ იყოს.

## Summary

The controlled differential equation with two constant delays in the phase coordinates is considered . Three types variation formulas are proved with respect to a new class of variation, which separately are corresponding to cases when variation of the initial moment take place from the left or from the right or from the both sides. The new class of variation means that the signs of variation of the initial moment and delays may be not same.

# შესავალი

სამაგისტრო ნაშრომში, სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისა-თვის

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), x(t-\sigma), u(t)), t \in [t_0, t_1] \qquad (1)$$

უწყვეტი საწყისი პირობით

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in [t_0 - \theta, t_0], \qquad (2)$$

სადაც $\theta = \max\{\tau, \sigma\}$, დამტკიცებულია ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები საწყისი მონაცემების ვარიაციის ახალი კლასის მიმართ. (2) პირობას ეწოდება უწყვეტი საწყისი პირობა, რადგანაც ყოველთვის $x(t_0) = \varphi(t_0)$, ე.ი. საწყის მომენტში ტრაექტორიისა და საწყისი ფუნქციის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა.

ამონახსნის ვარიაციის ფორმულა ეწოდებს ამონახსნის ნაზრდის მთავარი ნაწილის წრფივ წარმოდგენას საწყისი მონაცემების შეშფოთებების მიმართ. საწყისი მონაცე-მების ქვეშ იგულისხმება საწყისი მომენტის, დაგვიანების პარამეტრების, საწყისი და მართვის ფუნქციების ერთობლიობა.

ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები ერთი დაგვიანების შემცველ სამართი განტო-ლებისათვის

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), t \in [t_0, t_1] \qquad (3)$$

(2) საწყისი პირობითა და დაგვიანების პარამეტრის შეშფოთების გარეშე დამტკიცებუ-ლი იყო ნაშრომში [1].

ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები ერთი დაგვიანების შემცველ (3) სამართი განტო-ლებისათვის უწყვეტი საწყისი პირობითა და დაგვიანების პარამეტრის შეშფოთე-ბით, როცა საწყისი მომენტისა და დაგვიანების პარამეტრის ვარიაცებს $\delta t_0$–ს და $\delta\tau$–ს ერთდროულად აქვთ ერთნაირი ნიშნები დამტკიცებული იყო ნაშრომში [2]. სამაგისტრო ნაშრომში სიახლეს წარმოადგენს ის გარემოება, რომ ამონახსნის ვარი-აციის ფორმულები დამტკიცებულია ორი დაგვიანების შემცველი (1) განტოლებისა-თვის დაგვიანების პარამეტრების შეშფოთებების გათვალისწინებით იმ შემთხვევისა-თვის, როცა დაგვიანების პარამეტრების ვარიაციების $\delta\tau$–ს და $\delta\sigma$ -ს ნიშნები არ არის

დაკავშირებული საწყისი მომენტის ვარიაციის ნიშანთან. აქედან გამომდინარე, ნაშრომში მოყვანილი შედეგები გარკვეული აზრით წარმოადგენენ [1]-ში და [2]-ში მოყვანილი შედეგების განზოგადოებას.

ნაშრომი შედგება ოთხი პარაგრაფისაგან. პირველ პარაგრაფში დასმულია ამოცანა და მოყვანილია ძირითადი შედეგები.

მეორე პარაგრაფში გამოთვლილია ნაზრდის მნიშვნელობა საწყის მომენტში და ნაზრდი შეფასებულია მცირე პარამეტრის მიმართ. ეს შედეგები არსებითად გამოიყენება ძირითადი თეორემების დასამტკიცებლად და გამოქვეყნებულია ნაშრომში [3].

მე–3 და მე-4 პარაგრაფებში დამტკიცებულია ძირითადი თეორემები, რომელიც ეხება ამონახსნის ვარიაციის ფორმულას აგრეთვე იმ შემთხვევისთვის, როდესაც საწყის მომენტში ხდება მარცხნიდან და მარჯვნიდან ვარიაცია. სამაგისტრო ნაშრომის ის ნაწილი, რომელიც ეხება ამონახსნის ნაზრდის შეფასებას გამოქვეყნებულია ნაშრომში [3].

ბოლოს აღვნიშნავთ, რომ ამონახსნის ვარიაციის ფორმულების დამტკიცებისას ჩვენ ვისარგებლეთ [1], [2] და [4] შრომებში მოყვანილი სქემებით.

ვარიაციის ფორმულები გამოიყენება ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების დამტკიცებისას. ჩვეულებირივი დიფერენციალური განტოლებებისთვის ვარიაციის ფორმულები დამტკიცებულია [5]-ში.

## 1. ამოცანის დასმა და ძირითადი შედეგების ფორმულირება

ვთქვათ, $R_x^n$ არის $n$–განზომილებიანი ვექტორული სივრცე $x=(x^1,...,x^n)^T$ წერტილებით, სადაც T აღნიშნავს ტრანსპონირების ოპერაციას. დავუშვათ $O\subset R_x^n$ და $U_0\subset R_u^r$ არიან ღია სიმრავლეები, ხოლო $n$–განზომილებიანი $f(t,x,y,z,u)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- თითქმის ყველა ფიქსირებული $t\in I=[a,b]$ წერტილისათვის ფუნქცია

$$f(t,\cdot):\ O^3\times U_0\to R_x^n$$

უწყვეტად წარმოებადია;

- ნებისმიერ ფიქსირებული $(x,y,z,u)\in\ O^3\times U_0$ წერტილისათვის ფუნქციები

$$f(t,x,y,z,u),\ f_x(t,x,y,z,u),\ f_y(t,x,y,z,u), f_z(t,x,y,z,u), f_u(t,x,y,z,u)$$

ზომადია I ინტერვალზე;

- ნებისმიერი $K\subset O$ და $U\subset U_0$ კომპაქტებისათვის არსებობს ისეთი ფუნქცია $m_{K,U}(t)\in L_1(I,[0,\infty))$, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\left|f(t,x,y,z,u)\right|+\left|f_x(t,x,y,z,u)\right|+\left|f_y(t,x,y,z,u)\right|+\left|f_z(t,x,y,z,u)\right|+\left|f_u(t,x,y,z,u)\right|\le m_{K,U}(t)$$

ყოველი $(x,y,z,u)\in\ K^3\times U_0$ და თითქმის ყველა $t\in I$.

ვთქვათ $0<\tau_1<\tau_2$ და $0<\sigma_1<\sigma_2$ მოცემული რიცხვებია; $E_\varphi$ არის უწყვეტი

$$\varphi: I_1\to R_x^n$$

ფუნქციების სივრცე, სადაც $I_1=[\hat{\tau},b]$, $\hat{\tau}=a-\max\{\tau_2,\sigma_2\}$;

$$\Phi=\left\{\varphi\in E_\varphi:\varphi(t)\in O,t\in I_1\right\}$$

არის საწყის ფუნქციების სიმრავლე. შემდეგ, $E_u$ არის შემოსაზღვრული ზომადი

$$u: I\to R_u^r$$

ფუნქციების სივრცე, ხოლო

$$\Omega=\{u\in E_u: u(t)\in U_0, \mathrm{cl}u(I)\subset U_0\}$$

მართვის ფუნქციების სიმრავლეა, სადაც $u(I)=\{u(t), t\in I\}$, ხოლო $\mathrm{cl}u(I)$ აღნიშნავს $u(I)$ სიმრავლის ჩაკეტვას.

ყოველ

$$\mu=(t_0,\tau,\sigma,\varphi,u)\in A=(a,b)\times(\tau_1,\tau_2)\times(\sigma_1,\sigma_2)\times\Phi\times\Omega$$

ელემენტს შევუსაბამოთ სამართი დაგვიანებულ არგუმენტიანი ფუნქციონალურ-დიფე-რენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau),x(t-\sigma),u(t)) \qquad (1.1)$$

უწყვეტი საწყისი პირობით

$$x(t)=\varphi(t),\ t\in[t_0-\tau,t_0] \qquad (1.2)$$

**განსაზღვრება 1.1.** ვთქვათ $\mu=(t_0,\tau,\sigma,\varphi,u)\in A$. ფუნქციას $x(t)=x(t;\mu)\in O$, სადაც $t\in[\hat{\tau},t_1], t_1\in(t_0,b)$ ეწოდება (1.1) განტოლების ამონახსნი (1.2) საწყისი პირობით, ან $\mu$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, განსაზღვრული $[\hat{\tau},t_1]$ ინტერვალზე, თუ ის აკმაყოფილებს (1.2)-პირობას და აბსოლუტურად უწყვეტია $[t_0,t_1]$ ინტერვალზე და აკმაყოფილებს (1.1) განტოლებას თითქმის ყველგან $[t_0,t_1]$ ინტერვალზე.

ვთქვათ, $\mu_0=(t_{00},\tau_0,\sigma_0,\varphi_0,u_0)\in A$ არის ფიქსირებული ელემენტი.

$$E_\mu=R^1_{t_0}\times R^1_\tau\times R^1_\sigma\times E_\varphi\times E_u$$

სივრცეში შემოვიღოთ ვარიაციის სიმრავლე

$$V=\Big\{\delta\mu=(\delta t_0,\delta\tau,\delta\sigma,\delta\varphi,\delta u)\in E_\mu-\mu_0:|\delta t_0|\le\alpha,|\delta\tau|\le\alpha,|\delta\sigma|\le\alpha,\delta\varphi=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\delta\varphi_i,$$

$$\delta u=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\delta u_i,|\lambda_i|\le\alpha,i=\overline{1,k}\Big\},$$

სადაც $\delta\varphi_i\in E_\varphi-\varphi_0$, $\delta u_i\in E_u-u_0$, $i=\overline{1,k}$ ფიქსირებული ფუნქციებია;
$\alpha>0$ ფიქსირებული რიცხვია.
ვთქვათ, $x_0(t)$ არის $\mu_0=(t_{00},t_0,\sigma_0,\varphi_0,u_0)$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსა-ზღვრული ინტერვალზე $[\hat{\tau},t_{10}], t_{00}<t_{10}<b$.

არსებობენ რიცხვები $\delta_1 > 0$ და $\varepsilon_1 > 0$ ისეთი, რომ ნებისმიერ $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_1] \times V$ ელემენტს $\mu_0 + \varepsilon\delta\mu$ შეესაბამება ამონახსნი $x(t; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu)$ განსაზღვრული ინტერვალზე $[\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1] \subset I_1$.

ცხადია, რომ $x(t; \mu_0)$ ამონახსნი არის $x_0(t)$ ამონახსნის გაგრძელება $[\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1]$ ინტერ-ვალზე. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $x_0(t)$ ამონახსნი განსა-ზღვრულია ინტერვალზე $[\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1]$ .

განვსაზღვროთ $x_0(t) = x(t; \mu_0)$ ამონახსნის ნაზრდი

$$\Delta x(t; \varepsilon\delta\mu) = x(t; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu) - x_0(t), \quad (t, \varepsilon, \delta\mu) = [\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1] \times [0, \varepsilon_1] \times V.$$

**ამოცანის ფორმულირება:** წარმოვადგინოთ ამონახსნის ნაზრდი $\Delta x(t; \varepsilon\delta\mu)$ ორი შესაკრების სახით ისეთნაირად, რომ პირველი შესაკრები იყოს $\varepsilon$–ის მიმართ პირველი ხარისხის , ხოლო მისი კოეფიციენტი საწყისი მონაცემის შეშფოთებების მიმართ იყოს წრფივი ასახვა. ამასთან, მეორე შესაკრები $\varepsilon$-თან შედარებით იყოს მაღალი რიგის უსასრულო მცირე თანაბრად ვარიაციის სიმრავლის მიმართ.

ქვემოთ მოყვანილი თეორემები არის სამაგისტრო ნაშრომის ძირითადი შედეგი.

**თეორემა 1.1.** ვთქვათ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

- ფუნქცია $\varphi_0(t), t \in I_1$ აბსოლუტურად უწყვეტია და ფუნქცია $\dot{\varphi}_0(t)$ შემოსაზღვრულია;
- ფუნქცია $f(t, x, y, z, u)$ შემოსაზღვრულია $I \times O^3 \times U_0$ სიმრავლეზე;
- არსებობენ სასრული ზღვრები

$$\lim_{t \to t_{00-}} \dot{\varphi}_0^-(t) = \dot{\varphi}_0^-, \quad \lim_{w \to w_0} f(w, u_0(t)) = f^-,$$

სადაც $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1), w = (t, x, y, z) \in (a, t_{00}] \times O^3,\ w_0 = (t_{00}, \varphi_0(t_{00}), \varphi_0(t_{00} - \tau_0), \varphi_0(t_{00} - \sigma_0))$.

მაშინ არსებობენ რიცხვები $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ და $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ ისეთი, რომ ნებისმიერი

$$(t, \varepsilon, \delta\mu) \in [t_{00}, t_{10} + \delta_2] \times (0, \varepsilon_2) \times V^-, \ V^- = \{\delta\mu \in V : \ \delta t_0 \le 0\}$$

ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Delta x(t; \varepsilon\delta\mu) = \varepsilon\delta x(t; \delta\mu) + o(t; \varepsilon\delta\mu), \tag{1.3}$$

სადაც

$$\delta x(t;\delta\mu) = Y(t_{00};t)\left[\dot{\varphi}_0^- - f^-\right]\delta t_0 + \beta(t;\delta\mu), \tag{1.4}$$

$$\beta(t;\delta\mu) = Y(t_{00};t)\delta\varphi(t_{00}) + \int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} Y(s+\tau_0;t) f_y[s+\tau_0]\delta\varphi(s)ds$$

$$+ \int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} Y(s+\sigma_0;t) f_z[s+\sigma_0]\delta\varphi(s)ds - \left[\int_{t_{00}}^{t} Y(s;t) f_y[t]\dot{x}_0(s-\tau_0)ds\right]\delta\tau$$

$$-\left[\int_{t_{00}}^{t} Y(s;t) f_z[s]\dot{x}_0(s-\sigma_0)ds\right]\delta\sigma + \int_{t_{00}}^{t} Y(s;t) f_u[s]\delta u(s)ds; \tag{1.5}$$

$Y(s;t)$ არის $n \times n$ მატრიც–ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$Y_s(s;t) = Y(s;t) f_x[s] - Y(s+\tau_0;t) f_y[s+\tau_0] - Y(s+\sigma_0;t) f_z[s+\sigma_0],\ \ s \in [t_{00}, t]$$

და პირობას

$$Y(s;t) = \begin{cases} H, s = t, \\ \Theta, s > t. \end{cases}$$

აქ

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} f,\ \ f_y[s] = f_y(s, x_0(s), x_0(s-\tau_0), x_0(s-\sigma_0), u_0(s)) \ ,$$

$H$ არის ერთეულოვანი მატრიცა, ხოლო $\Theta$ ნულოვანი მატრიცა.

**ზოგიერთი კომენტარი.**

ა) $\delta x(t;\delta\mu)$ ეწოდება ამონახსნის ვარიაცია, ხოლო (1.4) ამონახსნის ვარიაციის ფორმულა;

ბ) $Y(t_{00};t)\left[\dot{\varphi}_0^- - f^-\right]\delta t_0)$ გამოსახულება (1.4)-ში არის $t_{00}$ შეშფოთების ეფექტი;

გ) $Y(t_{00};t)\delta\varphi(t_{00}) + \int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} Y(s+\tau_0;t) f_y[s+\tau_0]\delta\varphi(s)ds + \int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} Y(s+\sigma_0;t) f_z[s+\sigma_0]\delta\varphi(s)ds$

შესაკრები (1.5)-ში არის საწყისი ფუნქციის შეშფოთების ეფექტი;

დ) $-\left[\int_{t_{00}}^{t} Y(s;t) f_y[t]\dot{x}_0(s-\tau_0)ds\right]\delta\tau - \left[\int_{t_{00}}^{t} Y(s;t) f_z[s]\dot{x}_0(s-\sigma_0)ds\right]\delta\sigma$ შესაკრები (1.5)-ში არის დაგვიანების პარამეტრების ვარიაციის ეფექტი;

ე) $\int_{t_{00}}^{t} Y(s;t) f_u[s]\delta u(s)ds$ შესაკრები (1.5)-ში არის მართვის ფუნქციის ვარიაციის ეფექტი.

**თეორემა 1.2.** ვთქვათ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

- ფუნქცია $\varphi_0(t), t \in I_1$ აბსოლუტურად უწყვეტია და ფუნქცია $\dot{\varphi}_0(t)$ შემოსაზღვრულია;
- ფუნქცია $f(t,x,y,z,u)$ შემოსაზღვრულია $I \times O^3 \times U_0$ სიმრავლეზე;
- არსებობენ ზღვრები

$$\lim_{t\to t_{00}+} \dot{\varphi}_0(t) = \dot{\varphi}_{0,}^{+} \quad \lim_{w\to w_0} f\big(w, u_0(t)\big) = f^{+},$$

სადაც $w = (t,x,y,z) \in [t_{00},b) \times O^3,\ w_0 = \big(t_{00}, \varphi_0(t_{00}), \varphi_0(t_{00}-\tau_0), \varphi_0(t_{00}-\sigma_0)\big)$. მაშინ ყოველი $\hat{t}_0 \in (t_{00}, t_{10})$ ფიქსირებული მომენტისთვის არსებობენ რიცხვები $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_1)$ და $\delta_2 \in (0,\delta_1)$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $(t,\varepsilon,\delta\mu) \in [\hat{t}_0, t_{10}+\delta_2] \times (0,\varepsilon_2) \times V^{+}$, $V^{+}\{\delta\mu \in V :$ $\delta t_0 \geq 0\}$ ადგილი აქვს (1.3) ტოლობას, სადაც

$$\delta x(t;\delta\mu) = Y(t_{00};t)\left[\dot{\varphi}_0^{+} - f^{+}\right]\delta t_0 + \beta(t;\delta\mu) \tag{1.6}$$

**თეორემა 1.3.** ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 1.1. და თეორემა 1.2. პირობები. ამასთან, $\dot{\varphi}_0^{-} - f^{-} = \dot{\varphi}_0^{+} - f^{+} = \hat{f}$. მაშინ ყოველი $\hat{t}_0 \in (t_{00}, t_{10})$ ფიქსირებული მომენტისთვის არსებობენ რიცხვები $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_1)$ და $\delta_2 \in (0,\delta_1)$ ისეთი, რომ ნებისმიერი

$$(t,\varepsilon,\delta\mu) \in [\hat{t}_0, t_{10}+\delta_2] \times (0,\varepsilon_2) \times V$$

ადგილი აქვს (1.3) ტოლობას, სადაც

$$\delta x(t;\delta\mu) = Y(t_{00};t)\hat{f}\delta t_0 + \beta(t;\delta\mu)\,.$$

## 2. ლემები ამონახსნის ნაზრდის შეფასების შესახებ

ყოველ $\mu=(t_0,\tau,\varphi,f)\in A$ ელემენტს შევუსაბამოთ ფუნქციონალური დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{y}(t)=f\big(t,y(t),h(t_0,\varphi,y)(t-\tau)\big) \tag{2.1}$$

უწყვეტი საწყისი პირობით

$$y(t_0)=\varphi(t_0) \tag{2.2}$$

სადაც $h(t_0,\varphi,y)(t)$ ოპერატორი განისაზღვრება ფორმულით

$$h(t_0,\varphi,y)(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t\in[\hat{\tau},t_0),\\ y(t), & t\in[t_0,b].\end{cases} \tag{2.3}$$

**განსაზღვრება 2.1.** ვთქვათ მოცემულია $\mu=(t_0,\tau,\varphi,f)\in A$ ელემენტი. აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას $y(t)=\mathrm{y}(\mathrm{t};\mu)\in O$, სადაც $\mathrm{t}\in[\mathrm{r}_1,\mathrm{r}_2]\subset\mathrm{I}$, ეწოდება (2.1) განტოლების ამონახსნი (2.2) საწყისი პირობით, ან $\mu$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, განსაზღვრული $[\mathrm{r}_1,\mathrm{r}_2]$ ინტერვალზე, თუ $t_0\in[\mathrm{r}_1,\mathrm{r}_2]$, $y(t_0)=\varphi(t_0)$ და ფუნქცია $y(t)$ აკმაყოფილებს (2.1) განტოლებას თითქმის ყველგან $[\mathrm{r}_1,\mathrm{r}_2]$ ინტერვალზე.

ვთქვათ $y_0(t)$ არის $\mu_0=(t_{00},\tau_0,\varphi_0,f_0)\in A$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული ინ-ტერვალზე $[\mathrm{r}_1,\mathrm{r}_2]\subset(\mathrm{a},\mathrm{b})$; ვთქვათ $\mathrm{t}_{00}\in[\mathrm{r}_1,\mathrm{r}_2),\tau_0\in(\tau_1,\tau_2)$ და ვთქვათ $\mathrm{K}_1\subset O$ არის კომპაქტ სიმრავლე, რომელიც შეიცავს $\varphi_0(\mathrm{I}_1)\cup\mathrm{y}_0([\mathrm{r}_1,\mathrm{r}_2])$ სიმრავლის მიდამოს. მაშინ არსებობენ რიცხვები $\varepsilon_1>0$ და $\delta_1>0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in[0,\varepsilon_1]\times\mathrm{V}$, გვაქვს $\mu_0+\varepsilon\delta\mu\in\mathrm{A}$. ამასთან, ამ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი $\mathrm{y}(\mathrm{t};\mu_0+\varepsilon\delta\mu)$ განსაზღვრულია ინტერვალზე $[\mathrm{r}_1-\delta_1,\mathrm{r}_2+\delta_2]\subset\mathrm{I}$. უფრო მეტიც,

$$\begin{cases}\varphi(t)=\varphi_0(t)+\varepsilon\delta\varphi(t)\in\mathrm{K}_1, & t\in I_1,\\ y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu), & t\in[\mathrm{r}_1-\delta_1,\mathrm{r}_2+\delta_2].\end{cases} \tag{2.4}$$

და

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)=y(t;\mu_0)$$

თანაბრად $(\mathrm{t},\delta\mu)\in[\mathrm{r}_1-\delta_1,\mathrm{r}_2+\delta_2]\times\mathrm{V}$.

ერთადერთობის გამო, $y(t;\mu_0)$ ამონახსნი არის $y_0(t)$ ამონახსნის გაგრძელება ინტერვალზე $[\mathrm{r}_1-\delta_1,\mathrm{r}_2+\delta_2]$. $y_0(t)=y(t;\mu_0)$ ამონახსნის ნაზრდი ასე განისაზღვრება:

$$\Delta y(t)=\Delta y(t;\varepsilon\delta\mu)=y(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu)-y_0(t),\ (t,\varepsilon,\delta\mu)\in[\mathrm{r}_1-\delta_1,\mathrm{r}_2+\delta_2]\times[0,\varepsilon_1]\times \mathrm{V}.$$

ცხადია,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta y(t;\varepsilon\delta\mu)=0$$

თანაბრად $(\mathrm{t},\delta\mu)\in[\mathrm{r}_1-\delta_1,\mathrm{r}_2+\delta_2]\times\mathrm{V}$.

**ლემა 2.1.** ვთქვათ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

- ფუნქცია $\varphi_0(t), t\in I_1$ აბსოლუტურად უწყვეტია და ფუნქცია $\dot\varphi_0(t)$ შემოსაზღვრულია;
- ფუნქცია $f(t,x,y,z,u)$ შემოსაზღვრულია $I\times O^3\times U_0$ სიმრავლეზე;
- არსებობენ ზღვრები

$$\lim_{t\to t_{00}-}\dot\varphi_0(t)=\dot\varphi_0^-,\quad \lim_{w\to w_0}f\big(w,u_0(t)\big)=f^-,$$

სადაც $w=(t,x,y,z)\in(a,t_{00}]\times O^3,\ w_0=\big(t_{00},\varphi_0(t_{00}),\varphi_0(t_{00}-\tau_0)\,,\varphi_0(t_{00}-\sigma_0)\big)$.

მაშინ არსებობენ რიცხვები $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1]$ და $\delta_2\in(0,\delta_1]$ ისეთი, რომ

$$\max_{t\in[t_{00},r_2+\delta_2]}|\Delta y(t)|\le O(\varepsilon\delta\mu) \tag{2.1.1}$$

ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in(0,\varepsilon_2]\times V^-$, სადაც $V^-=\{\delta\mu\in V\ :\ \delta t_0\le 0\}$.

ამასთან,

$$\Delta y(t_{00})=\varepsilon[\delta\varphi(t_{00})+\{\dot\varphi_0^- - f^-\}\delta t_0]+o(\varepsilon\delta\mu) \tag{2.1.2}$$

**დამტკიცება.** ვთქვათ, $\varepsilon_2'\in(0,\varepsilon_1)$ იმდენად მცირეა, რომ $\forall(t,\varepsilon,\delta\mu)\in[t_0,t_{00}]\times[0,\varepsilon_2']\times V^-$ ადგილი აქვს უტოლობებს

$$\tau=\tau_0+\varepsilon\delta\tau>0$$
$$\sigma=\sigma_0+\varepsilon\delta\sigma>0$$

ინტერვალზე $t\in[t_{00},r_2+\delta_1]$ ფუნქცია $\Delta y(t)=y(t)-y_0(t)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot\Delta y(t)=a(t;\varepsilon\delta\mu) \tag{2.1.3}$$

სადაც

$$a(t;\varepsilon\delta\mu)=f(t,y_0(t)+\Delta y(t),h(t_0,\varphi,y_0+\Delta y)(t-\tau),h(t_0,\varphi,y_0+\Delta y)(t-\sigma),u(t))$$
$$-f\big(t,y_0(t),h(t_{00},\varphi_0,y_0)(t-\tau_0),h(t_{00},\varphi_0,y_0)(t-\sigma_0),u_0(t)\big)$$

გადავწეროთ (2.1.3) ინტეგრალური ფორმით

$$\Delta y(t)=\Delta y(t_{00})+\int_{t_{00}}^{t}a(\xi;\varepsilon\delta\mu)\,d\xi$$

აქედან

$$|\Delta y(t)| \le |\Delta y(t_{00})| + a_1(t;\varepsilon\delta\mu) \tag{2.1.4}$$

სადაც

$$a_1(t;\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t} |a(\xi;\varepsilon\delta\mu)|\, d\xi\,, \quad t \in [t_{00}, r_2 + \delta_1] \tag{2.1.5}$$

დავამტკიცოთ (2.1.2) ფორმულა.

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\begin{aligned}\Delta y(t_{00}) &= y(t_{00};\mu_0 + \varepsilon\delta\mu) - y_0(t_{00}) = \varphi_0(t_0) + \varepsilon\delta\varphi(t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_{00}} f(t, y_0(t) + \Delta y(t), \varphi(t-\tau), \varphi(t-\sigma), u(t))dt - \varphi_0(t_{00}).\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

გამოვთვალოთ სხვაობა

$$\varphi_0(t_0) - \varphi_0(t_{00}) = \int_{t_{00}}^{t_0} \dot\varphi_0(t)dt = \int_{t_{00}}^{t_0} \dot\varphi_0^- \,dt + \int_{t_{00}}^{t_0} |\dot\varphi_0(t) - \dot\varphi_0^-|\, dt = \varepsilon\delta t_0 \dot\varphi_0^- + o(\varepsilon\delta\mu)$$

მართლაც,

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_{00}}^{t_0} [\dot\varphi_0(t) - \dot\varphi_0^-]\, dt\right| &\le \int_{t_{00}}^{t_0} |\dot\varphi_0(t) - \dot\varphi_0^-| dt \le \int_{t_{00}}^{t_0} \sup_{t\in[t_0,t_{00}]} |\dot\varphi_0(t) - \dot\varphi_0^-| dt \\ &= \varepsilon\delta t_0 \sup_{t\in[t_0,t_{00}]} |\dot\varphi_0(t) - \dot\varphi_0^-| = o(\varepsilon\delta\mu).\end{aligned}$$

რადგან

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathit{sup}_{t\in[t_0,t_{00}]} |\dot\varphi_0(t) - \dot\varphi_0^-| = 0.$$

ამასთან,

$$\varepsilon\delta\varphi(t_0) = \varepsilon\delta\varphi(t_{00}) + \varepsilon[\delta\varphi(t_0) - \delta\varphi(t_{00})] = \varepsilon\delta\varphi(t_{00}) +$$

$$+\varepsilon\left[\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\big(\delta\varphi_i(t_0) - \delta\varphi_i(t_{00})\big)\right] = \varepsilon\delta\varphi(t_{00}) + o(\varepsilon\delta\mu).$$

აქედან გამომდინარე გვაქვს

$$\begin{aligned}\varphi_0(t_0) + \varepsilon\delta\varphi(t_0) - \varphi_0(t_{00}) &= \varepsilon\dot\varphi_0^-\delta t_0 + o(\varepsilon\delta\mu) + \varepsilon\delta\varphi(t_{00}) + o(\varepsilon\delta\mu) \\ &= \varepsilon[\dot\varphi_0^-\delta t_0 + \delta\varphi(t_{00})] + o(\varepsilon\delta\mu).\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

ცხადია, თუ $t \in [t_0, t_{00}]$, მაშინ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big(t, y_0(t) + \Delta y(t), \varphi(t-\tau), \varphi(t-\sigma)\big) = \lim_{t\to t_{00}-}\big(t, y_0(t), \varphi_0(t-\tau_0), \varphi_0(t-\sigma_0)\big) = w_0$$

შესაბამისად,თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\lim_{w\to w_0} f\big(w, u_0(t)\big) = f^-$, გვექნება

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in[t_0,t_{00}]}\left|f\big(t,y_0(t)+\Delta y(t),\varphi(t-\tau),\varphi(t-\sigma),u(t)\big)-f^-\right|=0.$$

ამრიგად,

$$\int_{t_0}^{t_{00}} f\big(t,y_0(t)+\Delta y(t),\varphi(t-\tau),\varphi(t-\sigma),u(t)\big)\,dt=\int_{t_0}^{t_{00}} f^- dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_{00}}\left[f\big(t,y_0(t)+\Delta y(t),\varphi(t-\tau),\varphi(t-\sigma),u(t)\big)-f^-\right]dt=-\varepsilon f^-\delta t_0+\mathrm{o}(\varepsilon\delta\mu). \qquad (2.1.8)$$

რადგანაც

$$\left|\int_{t_0}^{t_{00}}\left[f\big(t,y_0(t)+\Delta y(t),\varphi(t-\tau),\varphi(t-\sigma),u(t)\big)-f^-\right]dt\right|\le$$
$$\varepsilon|\delta t_0|\sup_{t\in[t_0,t_{00}]}\left|f\big(t,y_0(t)+\Delta y(t),\varphi(t-\tau),\varphi(t-\sigma),u(t)\big)-f^-\right|=\mathrm{o}(\varepsilon\delta\mu).$$

ზემოაღნიშნულის, კერძოდ კი (2.1.6)-ში (2.1.7) და (2.1.8) ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\Delta y(t_{00})=\varepsilon[\delta\varphi(t_{00})+\{\dot\varphi_0^- - f^-\}\delta t_0]+o(\varepsilon\delta\mu).$$

დავამტკიცოთ (2.1.1) უტოლობა, ამისათვის შევაფასოთ $a_1(t;\varepsilon\delta\mu)$.

$f(t,x,y,z,u)$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას $x,y,z$ და $u$ ცვლადების მიმართ, ე.ი. $K_1\subset O$ და $U_1\subset U_2$ კომპაქტებისთვის $\exists L_{K_1,U_1}\in L(I,[0.\infty))$ ფუნქცია, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(t,x_1,y_1,z_1,u_1)-f(t,x_2,y_2,z_2,u_2)|\le L_{K_1,U_1}(t)(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|+|u_1-u_2|)$$

$\forall(x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2)\in K^6,\forall u\in U_0$ . სიმარტივისთვის $L_{K_1,U_1}(t)$ აღვნიშნოთ $L(t)$.

$a_1(t;\varepsilon\delta\mu)$ შეფასებისთვის განვიხილოთ შემთხვევები:

1) $t_{00}+\tau_0\le r_2$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$S_1=min\{t_0+\tau,t_{00}+\tau_0\},\quad S_2=max\{t_{00}+\tau,t_{00}+\tau_0\}.$$

ცხადია, რომ

$$S_2-S_1=O(\varepsilon\delta\mu)$$

a) ვთქვათ $t\in[t_{00},S_1]$

რადგან $y(t,\mu_o+\varepsilon\delta\mu)\in K_1,u_0(t)+\varepsilon\delta u(t)\in U_1$, ამიტომ შეგვიძლია ვისარგებლოთ ლიფშიცის პირობით

$$a_1(t;\varepsilon\delta\mu)\le\int_{t_{00}}^{t}L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi+\sum_{i=2}^{4}a_i(t;\varepsilon\delta\mu)$$

სადაც

$$a_2(t;\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t} L(\xi)|h(t_0,\varphi,y_0+\Delta y)(\xi-\tau) - h(t_{00},\varphi_0,y_0)(\xi-\tau_0)|d\xi\ ,$$

$$a_3(t;\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t} L(\xi)|h(t_0,\varphi,y_0+\Delta y)(\xi-\sigma) - h(t_{00},\varphi_0,y_0)(\xi-\sigma_0)|d\xi\ ,$$

$$a_4(t;\varepsilon\delta\mu) = \varepsilon \int_{t_{00}}^{t} L(\xi)|\delta u(\xi)|d\xi\ .$$

ცხადია, რომ

$$a_4(t;\varepsilon\delta\mu) \le \varepsilon \int_{t_{00}}^{r_2+\delta_1} L(\xi)|\delta u(\xi)|d\xi = O(\varepsilon\delta\mu).$$

შევაფასოთ $a_2(t;\varepsilon\delta\mu)$

$$a_2(t;\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t} L(\xi)|\varphi_0(\xi-\tau)+\varepsilon\delta\varphi(\xi-\tau)-\varphi_0(\xi-\tau_0)|d\xi \le$$

$$\le \int_{t_{00}}^{S_1} L(\xi)\left|\int_{\xi-\tau_0}^{\xi-\tau}|\dot{\varphi}(\nu)|d\nu\right|d\xi + \varepsilon\int_{t_{00}}^{S_1} L(\xi)|\delta\varphi(\xi-\tau)|d\xi = O(\varepsilon\delta\mu). \qquad (2.1.9)$$

ამრიგად, როცა $t \in [t_{00}, S_1]$, მაშინ $a_2(t;\varepsilon\delta\mu) \le O(\varepsilon\delta\mu)$.

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $a_3(t;\varepsilon\delta\mu) \le O(\varepsilon\delta\mu)$.

b) ვთქვათ $t \in [S_1,\ S_2]$, მაშინ

$$a_1(t;\varepsilon\delta\mu) = a_1(S_1;\varepsilon\delta\mu) + \int_{S_1}^{t}|a(\xi;\varepsilon\delta\mu)|d\xi \le$$

$$\le O(\varepsilon\delta\mu) + O(\varepsilon\delta\mu) = O(\varepsilon\delta\mu).$$

ამრიგად, როცა $t \in [t_{00}, S_2]$, მაშინ $a_1(t;\varepsilon\delta\mu)$ არის $O(\varepsilon\delta\mu)$ რიგის.

c) ვთქვათ $t \in [S_2, r_2+\delta_1]$.

$$a_2(t;\varepsilon\delta\mu) = a_2(S_2;\varepsilon\delta\mu) + \int_{S_2}^{t} L(\xi)|y_0(\xi-\tau)+\Delta y(\xi-\tau)-y_0(\xi-\tau_0)|d\xi \le$$

$$\le O(\varepsilon\delta\mu) + \int_{S_2-\tau}^{t-\tau}\chi(\xi+\tau)L(\xi+\tau)|\Delta y(\xi)|d\xi + \int_{S_2}^{r_2+\delta_1} L(\xi)\left|\int_{\xi-\tau_0}^{\xi-\tau}|\dot{y}_0(\nu)|d\nu\right|d\xi$$

შესაბამისად მივიღებთ

$$a_1(t;\varepsilon\delta\mu) \le O(\varepsilon\delta\mu) + \int_{t_{00}}^{t} \chi(\xi+\tau)L(\xi+\tau)|\Delta y(\xi)|d\xi \qquad (2.1.10)$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ $S_2 - \tau \ge t_{00}$ . $\chi(t)$ არის $I$–ს მახასითებელი ფუნქცია.

2) $t_{00} + \tau_0 > r_2$. ახლა $\varepsilon_2'' \in (0, \varepsilon_1)$ და $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ იმდენად მცირე ავიღოთ, რომ შესრუ–ლდეს უტოლობა

$$t_0 + \tau > r_2 + \delta_2' \,, \;\; t_{00} + \tau_0 > r_2 + \delta_2' \,.$$

ამ შემთხვევაში $t - \tau \ge t_0$ , $t - \tau_0 \ge t_{00}$, $\forall t \in [t_{00}, r_2 + \delta_2']$

$$a_2(t;\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t} L(\xi)|\varphi_0(\xi-\tau) + \varepsilon\delta\varphi(\xi-\tau) - \varphi_0(\xi-\tau_0)|d\xi \le$$

$$\le \int_{t_{00}}^{r_2+\delta_2'} L(\xi)|\varphi_0(\xi-\tau) + \varepsilon\delta\varphi(\xi-\tau) - \varphi_0(\xi-\tau_0)|d\xi = O(\varepsilon\delta\mu).$$

(2.1.10) შეფასების მართებულობა დამტკიცებულია ინტერვალზე $[t_{00}, r_2 + \delta_2']$ ნების–მიერი $(\varepsilon, \delta\mu) \in (0, \varepsilon_2'') \times V^-$.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$a_3(t;\varepsilon\delta\mu) \le O(\varepsilon\delta\mu) + \int_{t_{00}}^{t} \chi(\xi+\sigma)L(\xi+\sigma)|\Delta y(\xi)|d\xi \qquad (2.1.11)$$

(2.1.10) და (2.1.11)–ის გათვალისწინებით (2.1.5)–დან გამომდინარეობს

$$|\Delta y(t)| \le |\Delta y(t_{00})| + a_1(t;\varepsilon\delta\mu) \le$$

$$\le O(\varepsilon\delta\mu) + \int_{t_{00}}^{t} \big(L(\xi) + \chi(\xi+\tau)L(\xi+\tau) + \chi(\xi+\sigma)L(\xi+\sigma)\big)|\Delta y(\xi)|d\xi.$$

ამ უკანასკნელისთვის გამოვიყენოთ გრონოულის ლემა, მივიღებთ

$$|\Delta y(t)| \le O(\varepsilon\delta\mu)e^{\int_{t_{00}}^{t}\left(L(\xi)+\chi(\xi+\tau)L(\xi+\tau)+\chi(\xi+\sigma)L(\xi+\sigma)\right)d\xi.} \le O(\varepsilon\delta\mu) \qquad (2.1.12)$$

ე.ი.

$$\max_{t\in[t_{00}, r_2+\delta_1]}|\Delta y(t)| \le O(\varepsilon\delta\mu)$$

ვიცით, $\Delta x(t) = x(t;\mu_0 + \varepsilon\delta\mu) - x_0(t)$, $t \in [\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1]$, $\hat{\tau} = a - max[\tau_2, \sigma_2]$. შევაფასოთ $\Delta x(t)$, როცა $t \in [\hat{\tau}, t_{00}]$.

როცა $t \in [\hat{\tau}, t_0]$,

$$|\Delta x(t)| = |\varphi_0(t) + \varepsilon\delta\varphi(t) - \varphi_0(t)| = |\varepsilon\delta\varphi(t)| \le O(\varepsilon\delta\mu)$$

როცა $t \in [t_0, t_{00}]$, აქ დიფერენციალური განტოლება აკმაყოფილებს საწყის პირობას $x_0(t) = \varphi_0(t)$, მაშინ

$$\Delta x(t) = x(t;\mu_0 + \varepsilon\delta\mu) - \varphi_0(t) =$$

$$= \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \mu_0 + \varepsilon\delta\mu, x(s-\tau), x(s-\sigma), u(s)\big)\, ds - \varphi_0(t)$$

$$|\Delta x(t)| = |\varphi(t_0) - \varphi_0(t)| + \left|\int_{t_0}^{t} f\big(s, \mu_0 + \varepsilon\delta\mu, x(s-\tau), x(s-\sigma), u(s)\big)\, ds\right| \le O(\varepsilon\delta\mu),$$

ვინაიდან

$$|\varphi(t_0) - \varphi_0(t)| \le |\varphi_0(t_0) - \varphi_0(t)| + \varepsilon|\delta\varphi(t_0)| \le \left|\int_{t}^{t_0} \dot{\varphi}_0(t)dt\right| + O(\varepsilon\delta\mu) \le O(\varepsilon\delta\mu)$$

აქედან გამომდინარე,

$$|\Delta x(t)| \le O(\varepsilon\delta\mu), \qquad \text{როცა} t \in [\hat{\tau}, t_{00}]$$

ახლა შევაფასოთ $|\Delta x(t)|$, როცა $t \in [t_{00}, t_{10} + \delta_1]$. $\Delta y(t)$-თვის გვაქვს შეფასება

$$\max_{t \in [t_{00}, r_2 + \delta_1]} |\Delta y(t)| \le O(\varepsilon\delta\mu)$$

ავიღოთ $t_{00} = r_1, t_{10} = r_2$. ერთადერთობის ძალით

$$y_0(t) = x_0(t)$$

და

$$y(t;\mu_0 + \varepsilon\delta\mu) = x(t;\mu_0 + \varepsilon\delta\mu)$$

აქედან გამომდინარე ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\Delta x(t) = \Delta y(t).$$

ამიტომ, როცა $t \in [t_{00}, t_{10} + \delta_1]$

$$\Delta x(t_{00}) = \varepsilon[(\dot{\varphi}_0^- - f^-)\delta t_0 + \delta\varphi(t_{00})] + \mathrm{o}(\varepsilon\delta\mu)$$

და

$$\max_{t \in [t_{00}, r_2 + \delta_1]} |\Delta x(t)| \le O(\varepsilon\delta\mu).$$

■

**ლემა 2.2.** ვთქვათ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

- ფუნქცია $\varphi_0(t), t \in I_1$ აბსოლუტურად უწყვეტია და ფუნქცია $\dot{\varphi}_0(t)$ შემოსაზღვრულია;
- ფუნქცია $f(t,x,y,z,u)$ შემოსაზღვრულია $I \times O^3 \times U_0$ სიმრავლეზე;
- არსებობენ ზღვრები

$$\lim_{t\to t_{00}+} \dot{\varphi}_0(t) = \dot{\varphi}_0^+, \quad \lim_{w\to w_0} f\big(w, u_0(t)\big) = f^+,$$

სადაც $w = (t,x,y,z) \in [t_{00}, b) \times O^3$, $w_0 = \big(t_{00}, \varphi_0(t_{00}), \varphi_0(t_{00}-\tau_0), \varphi_0(t_{00}-\sigma_0)\big)$.

მაშინ არსებობენ რიცხვები $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_1]$ და $\delta_2 \in (0,\delta_1]$, ისეთი, რომ

$$\max_{t\in[t_0, r_2+\delta_2]} |\Delta y(t)| \le O(\varepsilon\delta\mu) \tag{2.2.1}$$

ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu) \in (0,\varepsilon_2] \times V^+$, სადაც $V^+ = \{\delta\mu \in V \ : \ \delta t_0 \ge 0\}$.

ამასთან,

$$\Delta y(t_0) = \varepsilon[\delta\varphi(t_{00}) + \{\dot{\varphi}_0^+ - f^+\}\delta t_0] + o(\varepsilon\delta\mu) \tag{2.2.2}$$

**დამტკიცება.** ვთქვათ, $\varepsilon_2' \in (0,\varepsilon_1)$ იმდენად მცირეა, რომ $\forall(t,\varepsilon,\delta\mu) \in [t_{00}, t_0] \times [0,\varepsilon_2'] \times V^+$ ადგილი აქვს უტოლობებს

$$\tau = \tau_0 + \varepsilon\delta\tau > 0$$

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon\delta\sigma > 0$$

ინტერვალზე $t \in [t_0, r_2+\delta_1]$ ფუნქცია $\Delta y(t) = y(t) - y_0(t)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Delta y}(t) = a(t;\varepsilon\delta\mu) \tag{2.2.3}$$

სადაც

$$a(t;\varepsilon\delta\mu) = f(t, y_0(t)+\Delta y(t), h(t_0,\varphi,y_0+\Delta y)(t-\tau), h(t_0,\varphi,y_0+\Delta y)(t-\sigma), u(t))$$
$$-f\big(t, y_0(t), h(t_{00},\varphi_0,y_0)(t-\tau_0), h(t_{00},\varphi_0,y_0)(t-\sigma_0), u_0(t)\big)$$

გადავწეროთ (2.2.3) ინტეგრალური ფორმით

$$\Delta y(t) = \Delta y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi$$

აქედან

$$|\Delta y(t)| \le |\Delta y(t_0)| + a_1(t;\varepsilon\delta\mu) \tag{2.2.4}$$

სადაც

$$a_1(t;\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_0}^{t} |a(\xi;\varepsilon\delta\mu)|\, d\xi\,, \quad t \in [t_0, r_2+\delta_1] \tag{2.2.5}$$

დავამტკიცოთ (2.2.2) ფორმულა. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\Delta y(t_0) = y(t_0;\mu_0+\varepsilon\delta\mu) - y_0(t_0) = \varphi_0(t_0) + \varepsilon\delta\varphi(t_0) +$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_0} f(t, y_0(t)+\Delta y(t), \varphi(t-\tau), \varphi(t-\sigma), u(t))dt - \varphi_0(t_{00}). \qquad (2.2.6)$$

გამოვთვალოთ სხვაობა

$$\varphi_0(t_0)-\varphi_0(t_{00}) = \int_{t_{00}}^{t_0} \dot{\varphi}_0\,(t)dt = \int_{t_{00}}^{t_0} \dot{\varphi}_0^+\,dt + \int_{t_{00}}^{t_0} |\dot{\varphi}_0(t)-\dot{\varphi}_0^+|\,dt = \varepsilon\delta t_0\dot{\varphi}_0^+ + o(\varepsilon\delta\mu)$$

მართლაც,

$$\left|\int_{t_{00}}^{t_0} [\dot{\varphi}_0(t)-\dot{\varphi}_0^+]\,dt\right| \le \int_{t_{00}}^{t_0} |\dot{\varphi}_0(t)-\dot{\varphi}_0^+|dt \le \int_{t_{00}}^{t_0} \sup_{t\in[t_{00},t_0]}|\dot{\varphi}_0(t)-\dot{\varphi}_0^+|dt$$
$$= \varepsilon\delta t_0 \sup_{[t_{00},t_0]}|\dot{\varphi}_0(t)-\dot{\varphi}_0^+| = o(\varepsilon\delta\mu).$$

რადგან

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \underset{t\in[t_{00},t_0]}{sup}|\dot{\varphi}_0(t)-\dot{\varphi}_0^+| = 0.$$

ამასთან,

$$\varepsilon\delta\varphi(t_0) = \varepsilon\delta\varphi(t_{00}) + \varepsilon[\delta\varphi(t_0)-\delta\varphi(t_{00})] = \varepsilon\delta\varphi(t_{00}) +$$
$$+\varepsilon\left[\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\big(\delta\varphi_i(t_0)-\delta\varphi_i(t_{00})\big)\right] = \varepsilon\delta\varphi(t_{00}) + o(\varepsilon\delta\mu).$$

აქედან გამომდინარე გვაქვს

$$\varphi_0(t_0)+\varepsilon\delta\varphi(t_0)-\varphi_0(t_{00}) = \varepsilon\dot{\varphi}_0^+\delta t_0 + o(\varepsilon\delta\mu) + \varepsilon\delta\varphi(t_{00}) + o(\varepsilon\delta\mu) \qquad (2.2.7)$$
$$= \varepsilon[\dot{\varphi}_0^+\delta t_0 + \delta\varphi(t_{00})] + o(\varepsilon\delta\mu).$$

ცხადია, თუ $t\in[t_{00},t_0]$, მაშინ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big(t, y_0(t)+\Delta y(t), \varphi(t-\tau), \varphi(t-\sigma)\big) = \lim_{t\to t_{00}+}\big(t, y_0(t), \varphi_0(t-\tau_0), \varphi_0(t-\sigma_0)\big) = w_0$$

შესაბამისად,თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\lim_{w\to w_0} f\big(w, u_0(t)\big) = f^+$, გვექნება

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in[t_{00,}t_0]}\left|f\big(t, y_0(t)+\Delta y(t), \varphi(t-\tau), \varphi(t-\sigma), u(t)\big) - f^+\right| = 0.$$

ამრიგად,

$$\int_{t_0}^{t_{00}} f\big(t, y_0(t)+\Delta y(t), \varphi(t-\tau), \varphi(t-\sigma), u(t)\big)\,dt = \int_{t_0}^{t_{00}} f^+dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_{00}} \left[f\big(t, y_0(t)+\Delta y(t), \varphi(t-\tau), \varphi(t-\sigma), u(t)\big) - f^+\right]dt = -\varepsilon f^+\delta t_0 + \mathrm{o}(\varepsilon\delta\mu) \qquad (2.2.8)$$

რადგანაც

$$\left|\int_{t_0}^{t_{00}} \left[f\big(t, y_0(t) + \Delta y(t), \varphi(t-\tau), \varphi(t-\sigma), u(t)\big) - f^+\right] dt\right| \le$$

$$\varepsilon|\delta t_0| \sup_{t\in[t_{00},t_0]} \left|f\big(t, y_0(t) + \Delta y(t), \varphi(t-\tau), \varphi(t-\sigma), u(t)\big) - f^+\right| = \mathrm{o}(\varepsilon\delta\mu).$$

ზემოაღნიშნულის, კერძოდ კი (2.2.6)-ში (2.2.7) და (2.2.8) ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\Delta y(t_0) = \varepsilon[\delta\varphi(t_{00}) + \{\dot{\varphi}_0^+ - f^+\}\delta t_0] + o(\varepsilon\delta\mu).$$

დავამტკიცოთ (2.2.1) უტოლობა, ამისათვის შევაფასოთ $a_1(t;\varepsilon\delta\mu)$.

$f(t,x,y,z,u)$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას $x, y, z$ და $u$ ცვლადების მიმართ, ე.ი. $K_1 \subset O$ და $U_1 \subset U_2$ კომპაქტებისთვის $\exists L_{K_1,U_1} \in L(I,[0.\infty))$ ფუნქცია, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(t,x_1,y_1,z_1,u_1) - f(t,x_2,y_2,z_2,u_2)| \le L_{K_1,U_1}(t)(|x_1-x_2| + |y_1-y_2| + |z_1-z_2| + |u_1-u_2|)$$

$\forall(x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2) \in K^6, \forall u \in U_2$, სიმარტივისთვის $L_{K_1,U_1}(t)$ აღვნიშნოთ $L(t)$.

$a_1(t;\varepsilon\delta\mu)$ შეფასებისთვის განვიხილოთ შემთხვევები:

1) $t_{00} + \tau_0 \le r_2$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$S_1 = min\{t_{00}+\tau, t_{00}+\tau_0\}, \quad S_2 = max\{t_0+\tau, t_0+\tau_0\}.$$

ცხადია, რომ

$$S_2 – S_1 = O(\varepsilon\delta\mu)$$

a) ვთქვათ $t \in [t_0, S_1]$

რადგან $y(t,\mu_o + \varepsilon\delta\mu) \in K_1, u_0(t) + \varepsilon\delta u(t) \in U_1$, ამიტომ შეგვიძლია ვისარგებლოთ ლიფშიცის პირობით

$$a_1(t;\varepsilon\delta\mu) \le \int_{t_0}^{t} L(\xi)|\Delta y(\xi)|d\xi + \sum_{i=2}^{4} a_i(t;\varepsilon\delta\mu)$$

სადაც

$$a_2(t;\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_0}^{t} L(\xi)|h(t_0,\varphi,y_0+\Delta y)(\xi-\tau) - h(t_{00},\varphi_0,y_0)(\xi-\tau_0)|d\xi\ ,$$

$$a_3(t;\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_0}^{t} L(\xi)|h(t_0,\varphi,y_0+\Delta y)(\xi-\sigma) - h(t_{00},\varphi_0,y_0)(\xi-\sigma_0)|d\xi\ ,$$

$$a_4(t;\varepsilon\delta\mu) = \varepsilon\int_{t_0}^{t} L(\xi)|\delta u(\xi)|d\xi\ .$$

ცხადია, რომ

$$a_4(t;\varepsilon\delta\mu) \le \varepsilon \int_{t_0}^{r_2+\delta_1} L(\xi)|\delta u(\xi)|d\xi = O(\varepsilon\delta\mu).$$

შევაფასოთ $a_2(t;\varepsilon\delta\mu)$.

$$a_2(t;\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_0}^{t} L(\xi)|\varphi_0(\xi-\tau) + \varepsilon\delta\varphi(\xi-\tau) - \varphi_0(\xi-\tau_0)|d\xi \le$$

$$\le \int_{t_0}^{S_1} L(\xi)\left|\int_{\xi-\tau_0}^{\xi-\tau} |\dot{\varphi}(\nu)|d\nu\right|d\xi + \varepsilon \int_{t_{00}}^{S_1} L(\xi)|\delta\varphi(\xi-\tau)|d\xi = O(\varepsilon\delta\mu). \qquad (2.2.9)$$

ამრიგად, როცა $t \in [t_0, S_1]$, მაშინ $a_2(t;\varepsilon\delta\mu) \le O(\varepsilon\delta\mu)$.

ანალოგიურად მივიღებთ $a_3(t;\varepsilon\delta\mu) \le O(\varepsilon\delta\mu)$.

b) ვთქვათ $t \in [S_1, \ S_2]$, მაშინ

$$a_1(t;\varepsilon\delta\mu) = a_1(S_1;\varepsilon\delta\mu) + \int_{S_1}^{t} |a(\xi;\varepsilon\delta\mu)|d\xi \le$$

$$\le O(\varepsilon\delta\mu) + O(\varepsilon\delta\mu) = O(\varepsilon\delta\mu).$$

ამრიგად, როცა $t \in [t_0, S_2]$, მაშინ $a_1(t;\varepsilon\delta\mu)$ არის $O(\varepsilon\delta\mu)$ რიგის.

c) ვთქვათ $t \in [S_2, r_2 + \delta_1]$.

$$a_2(t;\varepsilon\delta\mu) \le O(\varepsilon\delta\mu) + \int_{t_0}^{t} \chi(\xi+\tau)L(\xi+\tau)|\Delta y(\xi)|d\xi \qquad (2.2.10)$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ $S_2 - \tau \ge t_0$ . $\chi(t)$ არის $I$–ს მახასითებელი ფუნქცია.

2) $t_{00} + \tau_0 > r_2$. ახლა $\varepsilon_2'' \in (0, \varepsilon_1)$ და $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ იმდენად მცირე ავიღოთ, რომ შესრუ–ლდეს უტოლობა

$$t_0 + \tau > r_2 + \delta_2' \ , \ \ t_{00} + \tau_0 > r_2 + \delta_2' \ .$$

ამ შემთხვევაში $t - \tau \ge t_0$ , $t - \tau_0 \ge t_{00}$, $\forall t \in [t_{00}, r_2 + \delta_2']$

$$a_2(t;\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t} L(\xi)|\varphi_0(\xi-\tau) + \varepsilon\delta\varphi(\xi-\tau) - \varphi_0(\xi-\tau_0)|d\xi \le$$

$$\leq \int_{t_{00}}^{r_2+\delta_2'} L(\xi)|\varphi_0(\xi-\tau)+\varepsilon\delta\varphi(\xi-\tau)-\varphi_0(\xi-\tau_0)|d\xi = O(\varepsilon\delta\mu).$$

(2.2.10) შეფასების მართებულობა დამტკიცებულია ინტერვალზე $[t_0, r_2+\delta_2']$ ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in(0,\varepsilon_2'')\times V^+$.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$a_3(t;\varepsilon\delta\mu) \leq O(\varepsilon\delta\mu) + \int_{t_0}^{t} \chi(\xi+\sigma)L(\xi+\sigma)|\Delta y(\xi)|d\xi \qquad (2.2.11)$$

(2.2.10) და (2.2.11)–ის გათვალისწინებით (2.2.5)–დან გამომდინარეობს

$$|\Delta y(t)| \leq |\Delta y(t_0)| + a_1(t;\varepsilon\delta\mu) \leq$$

$$\leq O(\varepsilon\delta\mu) + \int_{t_0}^{t} \big(L(\xi)+\chi(\xi+\tau)L(\xi+\tau)+\chi(\xi+\sigma)L(\xi+\sigma)\big)|\Delta y(\xi)|d\xi.$$

ამ უკანასკნელისთვის გამოვიყენოთ გრონოულის ლემა, მივიღებთ

$$|\Delta y(t)| \leq O(\varepsilon\delta\mu)e^{\int_{t_0}^{t}\left(L(\xi)+\chi(\xi+\tau)L(\xi+\tau)+\chi(\xi+\sigma)L(\xi+\sigma)\right)d\xi.} \leq O(\varepsilon\delta\mu) \qquad (2.2.12)$$

ე.ი.

$$\max_{t\in[t_0,r_2+\delta_1]} |\Delta y(t)| \leq O(\varepsilon\delta\mu)$$

ვიცით, $\Delta x(t) = x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu) - x_0(t)$, $t\in[\hat{\tau}, t_{10}+\delta_1]$, $\hat{\tau} = a - max[\tau_2,\sigma_2]$.

შევაფასოთ $\Delta x(t)$, როცა $t\in[\hat{\tau}, t_{00}]$.
როცა $t\in[\hat{\tau}, t_0]$,

$$|\Delta x(t)| = |\varphi_0(t)+\varepsilon\delta\varphi(t)-\varphi_0(t)| = |\varepsilon\delta\varphi(t)| \leq O(\varepsilon\delta\mu)$$

როცა $t\in[t_0,t_{00}]$, აქ დიფერენციალური განტოლება აკმაყოფილებს საწყის პირობას $x_0(t)=\varphi_0(t)$, მაშინ

$$\Delta x(t) = x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu) - \varphi_0(t) =$$

$$= \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f\big(s,\mu_0+\varepsilon\delta\mu, x(s-\tau), x(s-\sigma), u(s)\big)\,ds - \varphi_0(t)$$

$$|\Delta x(t)| = |\varphi(t_0) - \varphi_0(t)| + \left| \int_{t_0}^{t} f\big(s, \mu_0 + \varepsilon\delta\mu, x(s-\tau), x(s-\sigma), u(s)\big)\, ds \right| \le O(\varepsilon\delta\mu),$$

ვინაიდან

$$|\varphi(t_0) - \varphi_0(t)| \le |\varphi_0(t_0) - \varphi_0(t)| + \varepsilon|\delta\varphi(t_0)| \le \left| \int_{t}^{t_0} \dot{\varphi}_0(t) dt \right| + O(\varepsilon\delta\mu) \le O(\varepsilon\delta\mu)$$

აქედან გამომდინარე,

$$|\Delta x(t)| \le O(\varepsilon\delta\mu), \text{როცა } t \in [\hat{\tau}, t_{00}]$$

ახლა შევაფასოთ $|\Delta x(t)|$, როცა $t \in [t_{00}, t_{10} + \delta_1]$

ვიცით, $\Delta y(t)$-თვის გვაქვს შეფასება

$$\max_{t \in [t_{00}, r_2 + \delta_1]} |\Delta y(t)| \le O(\varepsilon\delta\mu).$$

ავიღოთ $t_{00} = r_1, t_{10} = r_2$. ერთადერთობის ძალით

$$y_0(t) = x_0(t)$$

და

$$y(t; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu) = x(t; \mu_0 + \varepsilon\delta\mu)$$

აქედან გამომდინარე ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\Delta x(t) = \Delta y(t).$$

ამიტომ, როცა $t \in [t_{00}, t_{10} + \delta_1]$

$$\Delta x(t_{00}) = \varepsilon[(\dot{\varphi}_0^- - f^-)\delta t_0 + \delta\varphi(t_{00})] + o(\varepsilon\delta\mu)$$

და

$$\max_{t \in [t_{00}, r_2 + \delta_1]} |\Delta x(t)| \le O(\varepsilon\delta\mu).$$

■

## 3. თეორემა 1.1 –ის დამტკიცება

ვთქვათ, ε იმდენად მცირეა, რომ ადგილი აქვს უტოლობებს

$t_{00}-\tau \le t_0,\ t_0+\tau \ge t_{00}$ და $t_{00}-\sigma \le t_0,\ t_0+\sigma \ge t_{00}$, სადაც $t \in [t_{00}, t_{10}+\delta_1]$. ფუნქცია

$$\Delta x(t) = x(t;\mu_0+\varepsilon\delta\mu) - x_0(t),\ t \in [\hat{\tau}, t_{10}+\delta_1]$$

აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\begin{aligned}\dot{\Delta x}(t) &= f\big(t, x_0(t)+\Delta x(t), x_0(t-\tau)+\Delta x(t-\tau), x_0(t-\sigma)+\Delta x(t-\sigma), u(t)\big) - f[t] = \\ & f\big(t, x_0(t)+\Delta x(t), x_0(t-\tau)+\Delta x(t-\tau), x_0(t-\sigma)+\Delta x(t-\sigma), u(t)\big) - f[t] \\ & + f_x[t]\Delta x(t) - f_x[t]\Delta x(t) - f_x[t]\Delta x(t) + f_y[t]\Delta x(t-\tau_0) - f_y[t]\Delta x(t-\tau_0) \qquad (3.1) \\ & + f_z[t]\Delta x(t-\sigma_0) - f_z[t]\Delta x(t-\sigma_0) + \varepsilon f_u[t]\delta u(t) - \varepsilon f_u[t]\delta u(t) = f_x[t]\Delta x(t) \\ & + f_y[t]\Delta x(t-\tau_0) + f_z[t]\Delta x(t-\sigma_0) + \varepsilon f_u[t]\delta u(t) + r(t;\varepsilon\delta\mu)\end{aligned}$$

ე.ი.

$$\dot{\Delta x}(t) = f_x[t]\Delta x(t) + f_y[t]\Delta x(t-\tau_0) + f_z[t]\Delta x(t-\sigma_0) + \varepsilon f_u[t]\delta u(t) + r(t;\varepsilon\delta\mu),$$

სადაც $t \in [t_{00}, t_{10}+\delta_2]$.

$$\begin{aligned} r(t;\varepsilon\delta\mu) &= f(t, x_0(t)+\Delta x(t), x_0(t-\tau)+\Delta x(t-\tau), x_0(t-\sigma)+\Delta x(t-\sigma), u(t)) \\ & - f[t] - f_x[t]\Delta x(t) - f_y[t]\Delta x(t-\tau_0) - f_z[t]\Delta x(t-\sigma_0) - \varepsilon f_u[t]\delta u(t). \qquad (3.2)\end{aligned}$$

$$f[t] = f(t, x_0(t), x_0(t-\tau), x_0(t-\sigma), u(t)).$$

კოშის ფორმულის გამოყენებით (3.1)-განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით:

$$\Delta x(t) = Y(t_{00}, t)\Delta x(t_{00}) + \int_{t_{00}-\tau_0}^{t} Y(\xi+\tau_0; t) f_y\,[\xi+\tau_0]\Delta x(\xi)d\xi$$

$$+ \int_{t_{00}-\sigma_0}^{t} Y(\xi+\sigma_0; t) f_y\,[\xi+\sigma_0]\Delta x(\xi)d\xi$$

$$+\varepsilon\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_u[\xi]\delta u(\xi)d\xi + \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)r(\xi;t)\,d\xi$$

$\boldsymbol{Y(\xi;t)}$ არის მატრიც-ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემაში მოყვანილ პირობებს და განტოლებას.

$Y(\xi;t)$ ფუნქცია უწყვეტია სიმრავლეზე $\Pi=\{(\xi;t): \xi\le t, t\in I\}$. ამდენად $\Delta x(t_{00})$ ფორმ-ულა ასე შეიძლება დავწეროთ:

$$Y(t_{00},t)\Delta x(t_{00})=\varepsilon Y(t_{00},t)[(\dot{\varphi}_0^- - f^-)\delta t_0+\delta\varphi(t_{00})]+o(t;\varepsilon\delta\mu) \qquad (3.3)$$

სადაც $o(t;\varepsilon\delta\mu)=Y(t_{00},t)o(\varepsilon\delta\mu)$.

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f[t;s,\varepsilon\delta\mu]=f(t,x_0(t)+s\Delta x(t),x_0(t-\tau_0)+s\{x_0(t-\tau)-x_0(t-\tau_0)+\Delta x(t-\tau)\},x_0(t-\sigma_0)$$

$$+s\{x_0(t-\sigma)-x_0(t-\sigma_0)+\Delta x(t-\sigma)\},u_0(t)+s\varepsilon\delta u(t)\big)$$

$$f[t]=f\big(t,x_0(t),x_0(t-\tau_0),x_0(t-\sigma_0),u_0(t)\big) \qquad (3.4)$$

$$\sigma_x(t;s,\varepsilon\delta\mu)=f_x[t;s,\varepsilon\delta\mu]-f_x[t]$$

$$\sigma_y(t;s,\varepsilon\delta\mu)=f_y[t;s,\varepsilon\delta\mu]-f_y[t]$$

$$\sigma_z(t;s,\varepsilon\delta\mu)=f_z[t;s,\varepsilon\delta\mu]-f_z[t]$$

$$\sigma_u(t;s,\varepsilon\delta\mu)=f_u[t;s,\varepsilon\delta\mu]-f_u[t]$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$F=f\big(t,x_0(t)+\Delta x(t),x_0(t-\tau)+\Delta x(t-\tau),x_0(t-\sigma)+\Delta x(t-\sigma),u_0(t)+\varepsilon\delta u(t)\big)$$

$$-f[t]=\int_0^1\frac{d}{ds}f[t;s,\varepsilon\delta\mu]ds \qquad (3.5)$$

$$=\int_0^1\big\{f_x[t;s,\varepsilon\delta\mu]\Delta x(t)+f_y[t;s,\varepsilon\delta\mu]\{x_0(t-\tau)-x_0(t-\tau_0)+\Delta x(t-\tau)\}$$

$$+f_z[t;s,\varepsilon\delta\mu]\{x_0(t-\sigma)-x_0(t-\sigma_0)+\Delta x(t-\sigma)\}+\varepsilon f_u[t;s,\varepsilon\delta\mu]\delta u(t)\}ds$$

(3.4) აღნიშვნებით (3.5) ასე ჩავწეროთ

$$f[t;s,\varepsilon\delta\mu]-f[t]=$$

$$=\int_0^1\left[f_x[t;s,\varepsilon\delta\mu]-f_x[t]\right]\Delta x(t)ds+$$

$$+\int_0^1\left[f_y[t;s,\varepsilon\delta\mu]-f_y[t]\right]\{x_0(t-\tau)-x_0(t-\tau_0)+\Delta x(t-\tau)\}ds$$

$$+\int_0^1\left[f_z[t;s,\varepsilon\delta\mu]-f_z[t]\right]\{x_0(t-\sigma)-x_0(t-\sigma_0)+\Delta x(t-\sigma)\}ds+$$

$$+\varepsilon\int_0^1\left[f_u[t;s,\varepsilon\delta\mu]-f_u[t]\right]\delta u(t)ds$$

$$+f_x[t]\Delta x(t)+f_y[t]\big(x_0(t-\tau)-x_0(t-\tau_0)+\Delta x(t-\tau)\big)$$

$$+f_z[t]\big(x_0(t-\sigma)-x_0(t-\sigma_0)+\Delta x(t-\sigma)\big)+\varepsilon f_u[t]\delta u(t)$$

$$=\left[\int_0^1\sigma_x(t;s,\varepsilon\delta\mu)ds\right]\Delta x(t)$$

$$+\left[\int_0^1[\sigma_y(t;s,\varepsilon\delta\mu)]ds\right]\{x_0(t-\tau)-x_0(t-\tau_0)+\Delta x(t-\tau)\}+$$

$$+\left[\int_0^1[\sigma_z(t;s,\varepsilon\delta\mu)]ds\right]\{x_0(t-\sigma)-x_0(t-\sigma_0)+\Delta x(t-\sigma)\}$$

$$+\varepsilon\left[\int_0^1\sigma_u(t;s,\varepsilon\delta\mu)ds\right]\delta u(t) \qquad (3.6)$$

$$+f_x[t]\Delta x(t)+f_y[t]\big(x_0(t-\tau)-x_0(t-\tau_0)+\Delta x(t-\tau)\big)$$

$$+f_z[t]\big(x_0(t-\sigma)-x_0(t-\sigma_0)+\Delta x(t-\sigma)\big)+\varepsilon f_u[t]\delta u(t)$$

გამოვიყენოთ კოშის ფორმულა $\Delta x(t)$ წარმოდგენისას $t\in[t_{00},t_{10}+\delta_1]$-ინტერვალზე:

$$\Delta x(t)=Y(t_{00},t)\Delta x(t_{00})+\int_{t_{00}-\tau_0}^{t}Y(\xi+\tau_0;t)f_y\,[\xi+\tau_0]\Delta x(\xi)d\xi$$

$$+\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t} Y(\xi+\sigma_0;t)f_z\,[\xi+\sigma_0]\Delta x(\xi)d\xi$$

$$+\varepsilon\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_u\,[\xi]\delta u(\xi)d\xi+\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)r(\xi;t)\,d\xi$$

ე.ი. მივიღეთ შესაკრები

$$\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)r(\xi;\varepsilon\delta\mu)\,d\xi.$$

მისი გარდაქმნით გვექნება

$$\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)r(\xi;\varepsilon\delta\mu)\,d\xi=$$

$$=\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)\,[f(t,x_0(\xi)+\Delta x(\xi),x_0(\xi-\tau)+\Delta x(\xi-\tau),x_0(\xi-\sigma)+\Delta x(\xi-\sigma),u(\xi))$$

$$-f[\xi]-\ f_x[\xi]\Delta x(\xi)-f_y[\xi]\Delta x(\xi-\tau_0)-f_z[\xi]\Delta x(\xi-\sigma_0)-\varepsilon f_u[\xi]\delta u(\xi)\big]d\xi$$

$$=\int_{t_{00}}^{t}\left\{Y(\xi;t)\left[\int_0^1\sigma_x(\xi;s,\varepsilon\delta\mu)ds\right]\Delta x(\xi)\right\}d\xi+$$

$$\int_{t_{00}}^{t}\left\{Y(\xi;t)\left[\int_0^1\sigma_y(\xi;s,\varepsilon\delta\mu)ds\right]\big(x_0(\xi-\tau)-x_0(\xi-\tau_0)+\Delta x(\xi-\tau)\big)\right\}+ \qquad (3.7)$$

$$+\int_{t_{00}}^{t}\left\{Y(\xi;t)\left[\int_0^1\sigma_z(\xi;s,\varepsilon\delta\mu)ds\right]\big(x_0(\xi-\sigma)-x_0(\xi-\sigma_0)+\Delta x(\xi-\sigma)\big)\right\}d\xi+$$

$$+\varepsilon\int_{t_{00}}^{t}\left\{Y(\xi;t)\left[\int_0^1\sigma_u(\xi;s,\varepsilon\delta\mu)ds\right]\delta u(\xi)\right\}d\xi+$$

$$\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_y[\xi]\big(\Delta x(\xi-\tau)-\Delta x(\xi-\tau_0)\big)d\xi+\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_z[\xi]\big(\Delta x(\xi-\sigma)-\Delta x(\xi-\sigma_0)\big)d\xi+$$

$$\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_y[\xi]\big(x_0(\xi-\tau)-x_0(\xi-\tau_0)\big)d\xi+\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_z[\xi]\big(x_0(\xi-\sigma)-x_0(\xi-\sigma_0)\big)d\xi.$$

გვაქვს შეფასება $\Delta x(\xi)\le O(\varepsilon\delta\mu),\ \xi\in[\hat{\tau},t_{10}+\delta_1]$.

ვთქვათ,

$$\|Y\|=sup\{|Y(\xi;t)|:\ \xi,t\in[t_{00},t_{10}+\delta_1]\}$$

ამიტომ (3.7)-ის პირველი წევრის შეფასებით გვექნება

$$\left|\int_{t_{00}}^{t}\left\{Y(\xi;t)\left[\int_0^1 \sigma_x(\xi;s,\varepsilon\delta\mu)ds\right]\Delta x(\xi)\right\}d\xi\right|\le\|Y\|O(\varepsilon\delta\mu)\int_{t_{00}}^{t_{10}+\delta_1}\left\{\left[\int_0^1|\sigma_x(\xi;s,\varepsilon\delta\mu)|ds\right]\right\}d\xi$$

აღვნიშნოთ

$$\varrho_3(\xi)=\int_0^1|\sigma_x(\xi;s,\varepsilon\delta\mu)|d\xi$$

მაშინ

$$\sigma_x(\xi;s,\varepsilon\delta\mu)=f_x[\xi;s,\varepsilon\delta\mu]-f_x[\xi]=$$

$$f_x(\xi,x_0(\xi)+s\Delta x(\xi),x_0(\xi-\tau_0)+s\{x_0(\xi-\tau)-x_0(\xi-\tau_0)+\Delta x(\xi-\tau)\},x_0(\xi-\sigma_0)+$$

$$+s\{x_0(\xi-\sigma)-x_0(\xi-\sigma_0)+\Delta x(\xi-\sigma)\},u_0(\xi)+s\varepsilon\delta u(\xi)\big) \tag{3.8}$$

$$-f_x\big(\xi,x_0(\xi),x_0(\xi-\tau_0),x_0(\xi-\sigma_0),u_0(\xi)\big)$$

გვექნება

$$x_0(\xi)+s\Delta x(\xi)\to x_0(\xi)$$

$$x_0(\xi-\tau_0)+s\{x_0(\xi-\tau)-x_0(\xi-\tau_0)+\Delta x(\xi-\tau)\}\to x_0(\xi-\tau_0)$$

$$x_0(\xi-\sigma_0)+s\{x_0(\xi-\sigma)-x_0(\xi-\sigma_0)+\Delta x(\xi-\sigma)\}\to x_0(\xi-\sigma_0)$$

საკმარისად მცირე $\varepsilon$-თვის $\sigma_x(\xi;s,\varepsilon\delta\mu)$-ინტეგრებადი ფუნქციები შემოსაზღვულია

$$|\sigma_x(\xi;s,\varepsilon\delta\mu)|\le m_{K_1}(\xi)\quad \text{თ.ყ. } \xi\in[t_{00},t_{10}+\delta_1].$$

$$\varrho_3(\xi)=\int_0^1|\sigma_x(\xi;s,\varepsilon\delta\mu)|d\xi\to 0,\ \varepsilon\to 0.\ \text{თ.ყ. } (\xi,s)\in[t_{00},t_{10}+\delta_1]\times[0,1].$$

ფუნქცია $x_0(t),\ t \in [\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1]$ არის აბსოლუტურად უწყვეტი, ამიტომ $\dot{x}_0(\xi - \tau_0)$ ფუნქციის ყოველი ფიქსირებული წერტილისათვის გვექნება:

$$|x_0(\xi - \tau_0) - x_0(\xi - \tau_0)| \leq \int_{\xi-\tau_0}^{\xi-\tau} |\dot{x}_0(\xi)|\, d\xi = O(\varepsilon\delta\mu)$$

და

$$|x_0(\xi - \sigma_0) - x_0(\xi - \sigma_0)| \leq \int_{\xi-\sigma_0}^{\xi-\sigma} |\dot{x}_0(\xi)|\, d\xi = O(\varepsilon\delta\mu)$$

აქედან გამომდინარე (3.7)-ში ყველა შესაკრები, რომელიც ორ ინტეგრალს შეიცავს იქნება $o(\varepsilon\delta\mu)$ რიგის.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ

$$\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi; t) f_y[\xi] \big(\Delta x(\xi - \tau) - \Delta x(\xi - \tau_0)\big) d\xi = o\,(\varepsilon\delta\mu)$$

შევაფასოთ $|\Delta x(\xi - \tau) - \Delta x(\xi - \tau_0)|$.

ვთქვათ,

$$\theta_1 = min\{t_0 + \tau, t_0 + \tau_0\} \quad \text{და} \quad \theta_2 = max\{t_{00} + \tau, t_{00} + \tau_0\}$$

I. ვთქვათ, $\xi \in [t_{00}, \theta_1]$

ე.ი. ერთროულად სრულდება $\xi < t_0 + \tau,\ \ \xi < t_0 + \tau_0$ , საიდანაც $\xi - \tau < t_0,\ \ \xi - \tau_0 < t_0$ .

ამრიგად,

$$|\Delta x(\xi - \tau) - \Delta x(\xi - \tau_0)| = |\varepsilon\delta\varphi(\xi - \tau) - \varepsilon\delta\varphi(\xi - \tau_0)| =$$
$$\varepsilon|\delta\varphi(\xi - \tau) - \delta\varphi(\xi - \tau_0)| = o(\xi; \varepsilon\delta\mu), \quad t \in [t_{00}, \theta_1]$$

ე.ი. როცა $t \in [t_{00}, \theta_1]$, გვაქვს შემდეგი შეფასება

$$\left| \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi; t) f_y[\xi] \big(\Delta x(\xi - \tau) - \Delta x(\xi - \tau_0)\big) d\xi \right| \leq o(\varepsilon\delta\mu) + \|Y\| \int_{\theta_1}^{t} \big|f_y[\xi]\big|\, o(\varepsilon\delta\mu) d\xi$$

$$\leq o(\varepsilon\delta\mu) + \|Y\| \int_{\theta_1}^{\theta_2} \big|f_y[\xi]\big|\, d\xi\, o(\varepsilon\delta\mu) = o(\varepsilon\delta\mu).$$

II. ვთქვათ $\xi \in [\theta_{1,}\theta_2]$. აქ ვისარგებლოთ, რომ $\Delta x(\xi) \leq O(\varepsilon\delta\mu)$, მაშინ

$$|\Delta x(\xi-\tau) - \Delta x(\xi-\tau_0)| \leq o(\varepsilon\delta\mu)$$

ცხადია, რომ $\theta_1 < \theta_2$ და $\theta_2 - \theta_1 = o(\varepsilon\delta\mu)$.

ამდენად, როცა $t \in [\theta_{1,}\theta_2]$, გვექნება იგივე შეფასება

$$\left|\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_y[\xi]\big(\Delta x(\xi-\tau) - \Delta x(\xi-\tau_0)\big)d\xi\right| \leq o(\varepsilon\delta\mu) + \|Y\| \int_{\theta_1}^{t} \left|f_y[\xi]\right| o(\varepsilon\delta\mu)d\xi$$

$$\leq o(\varepsilon\delta\mu) + \|Y\| \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left|f_y[\xi]\right| d\xi o(\varepsilon\delta\mu) = o(\varepsilon\delta\mu).$$

III. ახლა ვთქვათ, $\xi \in [\theta_{2,}t_{10} + \delta_1]$, მაშინ $\xi \geq \theta_2 > t_{00} + \tau$ და $\xi \geq t_{00} + \tau_0$. საიდანაც $\xi - \tau \geq t_{00}$, $\xi - \tau_0 \geq t_{00}$, გვექნება

$$|x_0(\xi-\tau_0) - x_0(\xi-\tau_0)| \leq \left|\int_{\xi-\tau_0}^{\xi-\tau} \dot{\Delta} x(\xi)\, d\xi\right|$$

მაგრამ

$$\left|\dot{\Delta} x(\xi)\right| = f(\xi, x_0(\xi) + \Delta x(\xi), x_0(\xi-\tau) + \Delta x(\xi-\tau), x_0(\xi-\sigma) + \Delta x(\xi-\sigma), u(\xi))$$
$$-f[\xi] \ \leq L(\xi)(|\Delta x(\xi)| + |x_0(\xi-\tau) - x_0(\xi-\tau_0)| + |\Delta x(\xi-\tau)| +$$
$$|x_0(\xi-\sigma) - x_0(\xi-\sigma_0)| + |\Delta x(\xi-\sigma)| + |\varepsilon\delta u(\xi)|) = L(\xi)o(\varepsilon\delta\mu)$$

ე.ი. გვაქვს შეფასება

$$\left|\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_y[\xi]\big(\Delta x(\xi-\tau) - \Delta x(\xi-\tau_0)\big)d\xi\right| \leq o(\varepsilon\delta\mu) + \|Y\| \int_{\theta_2}^{t_{10}+\delta_1} \left|f_y[\xi]\right| o(\varepsilon\delta\mu)d\xi$$
$$= o(\varepsilon\delta\mu)$$

ე.ი. ვაჩვენეთ, რომ

$$\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_y[\xi]\big(\Delta x(\xi-\tau) - \Delta x(\xi-\tau_0)\big)d\xi = o(\varepsilon\delta\mu)$$

ანალოგიურად, მივიღებთ, რომ

$$\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_z[\xi]\big(\Delta x(\xi-\sigma) - \Delta x(\xi-\sigma_0)\big)d\xi = o(\varepsilon\delta\mu).$$

ახლა გარდავქმნათ

$$\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t) f_y[\xi]\big(x_0(\xi-\tau) - x_0(\xi-\tau_0)\big)d\xi$$

ვთქვათ, $\xi \in [\hat{\tau}, t_{10} + \delta_1]$, $\dot{x_0}(t)$ ლებეგის წერტილია, მაშინ

$$x_0(\xi - \tau) - x_0(\xi - \tau_0) = \int_{\xi-\tau_0}^{\xi-\tau} \dot{x_0}(\xi)\, d\xi = \dot{x_0}(\xi - \tau_0)(-\tau + \tau_0) + \gamma_1(\xi; \varepsilon\delta\mu) =$$

$$-\varepsilon\dot{x_0}(\xi - \tau_0)d\tau + \gamma_1(\xi; \varepsilon\delta\mu)$$

სადაც

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\gamma_1(\xi; \varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon} = 0$$

ვთქვათ, $\gamma_1(\xi; \varepsilon\delta\mu)$ ზომადია, ხოლო $\frac{\gamma_1(\xi;\varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon}$ შემოსაზღვრულია თითქმის ყველა ξ-თვის ჯამებადი ფუნქციით. მართლაც,

$$\gamma_1(\xi; \varepsilon\delta\mu) = \varepsilon\dot{x_0}(\xi)\delta\tau + \int_{\xi-\tau_0}^{\xi-\tau} \dot{x}_0(\xi)\, d\xi$$

$$\left|\frac{\gamma_1(\xi; \varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon}\right| \le |\dot{x}_0(\xi)||\delta\tau| + \int_{\hat{\tau}}^{t_{10}+\delta_1} \dot{x}_0(\xi)\, d\xi$$

გარდავქმნათ (3.8). მივიღებთ

$$\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_y[\xi]\big(x_0(\xi-\tau) - x_0(\xi-\tau_0)\big)d\xi = \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_y[\xi]\big(-\varepsilon\dot{x_0}(\xi-\tau_0)d\tau + \gamma_1(\xi;\varepsilon\delta\mu)\big)d\xi$$

$$= \varepsilon \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_y[\xi]\left(-\dot{x_0}(\xi)d\tau + \frac{\gamma_1(\xi;\varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon}\right)d\xi = -\varepsilon \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_y[\xi]\dot{x_0}(\xi-\tau_0)d\tau$$

$$+\varepsilon \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_y[\xi]\, \frac{\gamma_1(\xi;\varepsilon\delta\mu)}{\varepsilon}\, d\xi = -\varepsilon \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_y[\xi]\dot{x_0}(\xi-\tau_0)d\tau + o(\varepsilon\delta\mu)$$

ანალოგიურად,

$$\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_z[\xi]\big(x_0(\xi-\sigma)-x_0(\xi-\sigma_0)\big)d\xi = -\varepsilon \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_z[\xi]\dot{x_0}(\xi-\sigma_0)d\sigma + o(\varepsilon\delta\mu)$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\Delta x(t;\varepsilon\delta\mu) = \varepsilon\delta x(t;\delta\mu) + o(t;\varepsilon\delta\mu)$$

მართლაც, (3.7) შესაკრებისთვის მივიღეთ

$$\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)r(\xi;\varepsilon\delta\mu)\, d\xi = o(\varepsilon\delta\mu) + o(\varepsilon\delta\mu) + o(\varepsilon\delta\mu) + o(\varepsilon\delta\mu) + o(\varepsilon\delta\mu) + o(\varepsilon\delta\mu)$$

$$-\varepsilon\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_y[\xi]\dot{x}_0(\xi)d\tau + o(\varepsilon\delta\mu) - \varepsilon\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_z[\xi]\dot{x}_0(\xi)d\tau + o(\varepsilon\delta\mu)$$

$$= o(\varepsilon\delta\mu) - \varepsilon\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)\left[f_y[\xi] + f_z[\xi]\right]\dot{x}_0(\xi)d\xi$$

გვაქვს შემდეგი წარმოდგენა

$$\Delta x(t) = Y(t_{00},t)\Delta x(t_{00}) + \int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t)f_y\,[\xi+\tau_0]\Delta x(\xi)d\xi$$

$$+\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} Y(\xi+\sigma_0;t)f_y\,[\xi+\sigma_0]\Delta x(\xi)d\xi$$

$$+\varepsilon\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_u\,[\xi]\delta u(\xi)d\xi + \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)r(\xi;t)\,d\xi.$$

ვისარგებლოთ (3.3) წარმოდგენით

$$Y(t_{00},t)\Delta x(t_{00}) = \varepsilon Y(t_{00},t)[(\dot{\varphi}_0^- - f^-)\delta t_0 + \delta\varphi(t_{00})] + o(t;\varepsilon\delta\mu)$$

სადაც $o(t;\varepsilon\delta\mu) = Y(t_{00},t)o(\varepsilon\delta\mu)$.

აქედან გვექნება

$$\Delta x(t) = \varepsilon Y(t_{00},t)[(\dot{\varphi}_0^- - f^-)\delta t_0 + \delta\varphi(t_{00})] + \varepsilon Y(t_{00},t)\delta\varphi(t_{00}) +$$

$$\varepsilon\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t)f_y\,[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi + \varepsilon\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} Y(\xi+\sigma_0;t)f_y\,[\xi+\sigma_0]\delta\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\varepsilon\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_u\,[\xi]\delta u(\xi)d\xi - \varepsilon\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)\dot{x}_0(\xi-\tau_0)d\xi - \varepsilon\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)\dot{x}_0(\xi-\sigma_0)d\xi$$

$$= \varepsilon\delta x(t;\delta\mu) + o(t;\varepsilon\delta\mu)$$

სადაც

$$\delta x(t;\delta\mu) = Y(t_{00};t)\left[\dot{\varphi}_0^- - f^-\right]\delta t_0 + \beta(t;\delta\mu),$$

$$\beta(t;\delta\mu) = Y(t_{00};t)\delta\varphi(t_{00}) + \int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} Y(s+\tau_0;t)f_y[s+\tau_0]\delta\varphi(s)ds$$

$$+\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} Y(s+\sigma_0;t) f_z[s+\sigma_0]\delta\varphi(s)ds - \left[\int_{t_{00}}^{t} Y(s;t) f_y[t]\dot{x}_0(s-\tau_0)ds\right]\delta\tau$$

$$-\left[\int_{t_{00}}^{t} Y(s;t) f_z[s]\dot{x}_0(s-\sigma_0)ds\right]\delta\sigma + \int_{t_{00}}^{t} Y(s;t) f_u[s]\delta u(s)ds;$$

თეორემა 1.1 დამტკიცებულია.

■

## 4. თეორემა 1.2 –ის დამტკიცება

უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ $\delta\mu \in V^+$, ე.ი. $t_{00} < t_0$; აქედან გამომდინარე გვაქვს

$$\Delta x(t) = \begin{cases} \varepsilon\delta\varphi(t), & \text{როცა} \quad t \in [\hat{\tau}, t_{00}) \\ \varphi(t) - y_0(t), & \text{როცა} \quad t \in [t_{00}, t_0) \\ \Delta y(t), & \text{როცა} \quad t \in [t_0, t_{10} + \delta_1) \end{cases}$$

ფუნქცია $\Delta x(t)$ აკმაყოფილებს (3.1) განტოლებას ინტერვალზე $t \in [t_0, t_{10} + \delta_2]$.

კოშის ფორმულის გამოყენებით (3.1)-განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით

$$\Delta x(t) = Y(t_0, t)\Delta x(t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^{t} Y(\xi; t) f_u\,[\xi]\delta u(\xi) d\xi + + \sum_{i=0}^{2} b_i\,(t; t_0, \varepsilon\delta\mu), \qquad (4.1)$$

სადაც

$$b_0(t; t_0, \varepsilon\delta\mu) = \int_{t_0-\tau_0}^{t_{00}} Y(\xi + \tau_0; t) f_y\,[\xi + \tau_0]\Delta x(\xi) d\xi,$$

$$b_1(t; t_0, \varepsilon\delta\mu) = \int_{t_0-\sigma_0}^{t_{00}} Y(\xi + \sigma_0; t) f_y\,[\xi + \sigma_0]\Delta x(\xi) d\xi,$$

$$b_2(t; t_0, \varepsilon\delta\mu) = \int_{t_{00}}^{t} Y(\xi; t) r(\xi; t)\, d\xi$$

$Y(\xi; t)$ არის მატრიც-ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემაში მოყვანილ პირობებს და განტოლებას.

ამასთან $Y(\xi; t)$ ფუნქცია უწყვეტია სიმრავლეზე $\Pi = \{(\xi; t) :\ \xi \le t, t \in I\}$. ამდენად $\Delta \mathrm{x}(\mathrm{t}_0)$ ფორმულა ასე შეიძლება დავწეროთ:

$$Y(t_0, t)\Delta x(t_0) = \varepsilon Y(t_0, t)[(\dot{\varphi}_0^+ - f^+)\delta t_0 + \delta\varphi(t_{00})] + o(t; \varepsilon\delta\mu) \qquad (4.2)$$

სადაც $o(t; \varepsilon\delta\mu) = Y(t_0, t) o(\varepsilon\delta\mu)$.

ახლა გარდავქმნათ $b_0(t; t_0, \varepsilon\delta\mu)$. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$b_0(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)=\varepsilon\int_{t_0-\tau_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t)f_y\,[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\int_{t_{00}}^{t_0} Y(\xi+\tau_0;t)f_y\,[\xi+\tau_0]\Delta x(\xi)d\xi \tag{4.3}$$

$$=\varepsilon\int_{t_{00}-\tau_0}^{t_{00}} Y(\xi+\tau_0;t)f_y\,[\xi+\tau_0]\delta\varphi(\xi)d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

ზუსტად ანალოგიური გარდაქმნით $b_1(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)$ გამოსახულებას ექნება სახე:

$$b_1(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)\varepsilon\int_{t_{00}-\sigma_0}^{t_{00}} Y(\xi+\sigma_0;t)f_y\,[\xi+\sigma_0]\delta\varphi(\xi)d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

მსგავსი გზით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$b_2(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)=-\varepsilon\left[\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)\big[f_y[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_0)+f_z[\xi]\dot{x}_0(\xi-\sigma_0)\big]\,d\xi\right]+o(t;\varepsilon\delta\mu). \tag{4.4}$$

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ

$$\varepsilon\int_{t_0}^{t} Y(\xi;t)f_u\,[\xi]\delta u(\xi)d\xi=\varepsilon\int_{t_{00}}^{t} Y(\xi;t)f_u\,[\xi]\delta u(\xi)d\xi \tag{4.5}$$

და თუ გავითვალისწინებთ (4.1)–ში (4.2)–(4.5) წარმოდგენებს, მივიღებთ (1.3)–ს, სადაც $\delta x(t;\delta\mu)$ -ს აქვს (1.6) სახე.

■

შევნიშნოთ, რომ თეორემა (1.3) წარმოადგენს თეორემა 1.1. და თეორემა 1.2. შედეგს.

## დ ა ს კ ვ ნ ა

დაგვიანებულ არგუმენტიანი არაწრფივი სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისათვის  დამტკიცებულია ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები საწყისი მონაცემების ვარიაციის ახალი კლასის მიმართ, როცა საწყისი მომენტი განიცდის შეშფოთებას ან მარცხნიდან ან მარჯვნიდან ან ორივე მხრიდან. საწყისი მონაცემების ქვეშ იგულისხმება საწყისი მომენტის, დაგვიანების პარამეტრების, საწყისი და მართვის ფუნქციების ერთობლიობა.ვარიაციის ფორმულებში გამოვლენილია საწყისი მომენტისა და დაგვიანების პარამეტრების შეშფოთების ეფექტები. გარდა ამისა, გამოთვლილია ამონახსნის ნაზრდის მნიშვნელობა საწყის მომენტში და დადგენილია ამონახსნის ნაზრდის რიგი მცირე პარამეტრის მიმართ, რომლებიც არსებითად გამოიყენება ამონახსნის ვარიაციის ფორმულების დამტკიცებისას. მიღებული შედეგები შეიძლება გამოყენებული იქნეს  საწყისი მონაცემების ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების მისაღებად, შეშფოთებული კოშის ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის მოსაძებნად  და იმუნური პასუხის მათემატიკური მოდელის სენსიტიურობის გამოსაკვლევად.

# ლიტერატურა


1. Tadumadze T., Alkhazishvili L., Formulas of variation of solution for non-linear controlled delay differential equation with continuous initial condition. *Mem. Diff. Eq. Math. Phys.* 31 ( 2004 ), 83-97 .

2. Tadumadze T., Nachaoui A., Variation formulas of solution for a controlled delay functional-differential equation considering delay perturbation. *TWMS J. App. Eng. Math.* V.1, N.1, 2011, 34-44.

3. Shavadze T., On estimation of the increment of solution for a controlled functional differential equation considering delay parameter perturbation. *Sem. of I. Vekua Inst. of Appl. Math. Rep.* , 41 (2015),46-49.

4. Tadumadze T., Variation formulas of solution for a delay differential equation with taking into account delay perturbation and the continuous initial condition. *Georgian Math. J.* v.18 (2011), No. 2, 348-364.

5. Gamkrelidze R.V., Principle of optimal control theory. Plenum press, New York-London, 1978.