ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
კომპიუტერულ მეცნიერებათა დეპარტამენტი

ბაკა ცუცხვაშვილი

სტაციონარულ შემთხვევით გარემოში სტოქასტური ავტომატის ქცევის ასიმპტოტური თვისებები

სამაგისტრო პროგრამა: ინფორმაციული სისტემები

სამაგისტრო ნაშრომი შესრულებულია ინფორმაციულ სისტემებში მეცნიერების მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი: ტარიელ ხვედელიძე

ფიზ.-მათ. მეცნიერებათა კანდიდატი,

ასოცირებული პროფესორი

თბილისი

2016

სარჩევი

ანოტაცია …………………………………………………………………………………გვ.3

შესავალი …………………………………………………………………………………გვ.5

§ 1. ზოგადი ცნებები სტაციონარულ შემთხვევით გარემოში სასრული და უსასრულო ავტომატების ფუნქციონირების შესახებ გვ.7

§ 2. სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$ გარემოში სასრული სტოქასტური $T_{2n,2}^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატის ფუნქციონირების აღმწერი მარკოვის ჯაჭვის საკუთრივი მნიშვნელობები…………….. გვ.11

§ 3. სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$ გარემოში უსასრულო სტოქასტური $T_2^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატის ქცევა……………………….. გვ.16

§ 4. სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$ გარემოში სასრული სტოქასტური $T_{2n,2}^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატის ასიმპტოტური ქცევა……………………….................... გვ.20

§ 5. სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$ გარემოში უსასრულო სტოქასტური $T_2^{(x)}(l,1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატის ქცევის ალბათური მახასიათებლების გამოთვლის რიცხვითი ალგორითმი... გვ.22

გამოყენებული ლიტერატურა გვ.29

დანართი .... გვ. 30

ანოტაცია

სასრული ავტომატები წარმოადგენენ მეტად მოსახერხებელ ობიექტებს რთული სისტემების მათემატიკური მოდელების ასაგებად. ასეთ სისტემებში მარტივი ობიექტების როლში შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც დეტერმინირებული, ასევე ალბათური (სტოქასტური) სტრუქტურის სასრული ავტომატები. განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს ისეთი ავტომატები, რომელთა ქცევა მიზანშეწონილია და რომელთა სტრუქტურაშიც არავითარი ინფორმაცია არაა იმის შესახებ, თუ როგორ სტაციონარულ გარემოში უხდებათ მათ ფუნქციონირება. ასეთი ავტომატების სტრუქტურა უნდა უზრუნველყოფდეს სიმეტრიულობის თვისებას: ავტომატის მიერ სხვადასხვა მოქმედების შესრულებისას ავტომატის შესასვლელზე შემავალი სიგნალების ერთი და იგივე მიმდევრობის შემთხვევაში ავტომატის ქცევა უნდა იყოს ერთნაირი.

როგორც გამოკვლევებმა აჩვენა, ისეთი ავტომატის აგება, რომელიც რაიმე პარამეტრის მიმართ ოპტიმალური იქნება ნებისმიერ გარემოში, პრაქტიკულად შეუძლებელია. ამიტომ მეტად მნიშვნელოვანია სხვადასხვა სახის ავტომატების კონსტრუქციების აგება და შემთხვევით გარემოში მათი ქცევის ალბათური მახასიათებლების გამოთვლის როგორც ანალიზური, ასევე რიცხვითი მეთოდების შემუშავება.

სამაგისტრო ნაშრომში განხილულია სპეციალური კლასის სასრული სტოქასტური ავტომატების ფუნქციონირება ისეთ სტაციონარულ შემთხვევით გარემოში, რომელიც ავტომატის მოქმედებაზე რეაგირებს საპასუხო რეაქციებით და ეს რეაქციები ავტომატის მიერ აღიქმება როგორც ერთ-ერთი სახის რეაქცია შემდეგი სამი კლასის რეაქციიდან - სასურველი რეაქციების კლასი (მოგება, დაჯილდოება), არასასურველი რეაქციების კლასი (წაგება, დაჯარიმება) და ნეიტრალური რეაქციების კლასი (ინდიფერენტულობა). ასეთ გარემოში გადაწყვეტილია სასრული სტოქასტური ავტომატის ფუნქციონირების აღმწერი მარკოვის ჯაჭვის სპექტრის ლოკალიზაციის ამოცანა. კერძოდ, გარემოს პარამეტრებზე დამოკიდებულების მიხედვით დადგენილია იმ საკუთრივი რიცხვის არსებობა და ერთადერთობა, რომლის მოდულიც მიისწრაფის 1-კენ ავტომატის მეხსიერების უსასრულო ზრდის შემთხვევაში; მაწარმოებელ ფუნქციათა მეთოდზე დაყრდნობით კი დადგენილია ამ კლასის სასრული ავტომატების მიმდევრობის კრებადობა იმავე სტრუქტურის შესაბამისი უსასრულო ავტომატისაკენ და მოყვანილია სასრული სტოქასტური ავტომატების

შესაძლებელი ასიმპტოტური ქცევის სრული კლასიფიკაცია; განხილულია აგრეთვე უფრო ფართო კლასის უსასრულო სტოქასტური ავტომატის ფუნქციონირება სამი კლასის რეაქციის მქონე სტაციონარულ შემთხვევით გარემოში და შემუშავებულია მისი ქცევის ალბათური მახასიათებლების გამოსათვლელი რიცხვითი ალგორითმი.

აღნიშნულ საკითხებთან დაკავშირებით ჩატარებულია მანქანური ექსპერიმენტები და მოყვანილია მიღებული შედეგების ანალიზი.

Annotation

Finite automats are useful objects, used for building of a complex mathematical models. In this kind of systems, deterministic and finite automats with stochastic (probabilistic) structure can be described as simple objects. The most interesting kind of automats are the ones, which acts are advisable and its structure does not contain any kind of information about the environment, in which it is functioning. This kind of automats must guarantee the following symmetry feature: in the case of similar sequence of the input signals, when automat is executing different kind of actions on its input, automat's behavior must be identical.

As studies show, it is practically impossible to build an automat, which will be optimal to any parameters, in any kind of environment. Therefore it is very important to build different kind of automats constructions and elaborate analytical and numerical methods to calculate its probabilistic behaviors in a random environment.

In the master's thesis the examined things are: functioning of the special class' finite stochastic automats, in the stationary random environment which reacts with responses on automat's actions and this responses are perceived by the automats like one of the following reactions from the three type of classes' possible reactions:

1. Class with desired reactions (win, award)
2. Class with non-desired reactions (loss, fine)
3. Class with neutral reactions (indifferent)

Finite stochastic automat's functionality descriptor, Markov chain spectral localization problem is solved in this kind of environment. Particularly, depending on the environment's parameters, the existence and uniqueness of the eigenvalue, which's module strives toward to 1 (in the case of infinite increase of the automat's memory) is estimated. Based on the producing function, sequence convergence of the finite automats to the infinite automat (which has the similar structure) is estimated, together with the available asymptotic action's complete classification.

The functionality of the wider class' infinite stochastic automats functionality, in the stationary stochastic environment which has reactions of the 3 classes, is also described, and the numerical algorithm which calculates its actions' probabilistic characteristics is implemented.

Machine experiments are held regarding the above mentioned issues and the analysis of the obtained results are provided in the thesis.

შესავალი

განსხვავებული ბუნების მქონე სისტემებში მიმდინარე პროცესების კვლევის დროს ფართოდ გამოიყენება მდგომარეობათა სასრული ან თვლადი სიმრავლის მარკოვის ჯაჭვებისა და პროცესების თეორიის მეთოდები.

მარკოვის ჯაჭვების გამოყენების საინტერესო მაგალითს წარმოადგენს სტაციონარულ შემთხვევით გარემოში სპეციალური კლასის სასრული ავტომატებისა და ავტომატების კოლექტივების ქცევის თეორია. ამ კლასის ავტომატები საინტერესოა არა მარტო თეორიული თვალსაზრისით, არამედ ისეთი თვალსაზრისითაც, როგორიცაა, მაგალითად, ცოცხალი ორგანიზმის მიზანშეწონილი ქცევის ცნება, რომლის შესაბამის ფორმალიზაციასაც ამ კლასის ავტომატების ბაზაზე მივყავართ ზუსტი ამოცანების დასმამდე და მეტად საინტერესო და საჭირო მათემატიკურ შედეგებამდე.

რთული სისტემების მარკოვის მოდელებში ელემენტარული ობიექტების როლში გამოიყენება როგორც დეტერმინირებული, ასევე ალბათური სტრუქტურის სასრული ავტომატები. იდეა იმის შესახებ, რომ სასრული ავტომატები წარმოადგენს მეტად მოსახერხებელ ობიექტებს რთული, მათ შორის ბიოლოგიური სისტემების მათემატიკური მოდელების ასაგებად, პირველად გამოთქვა ჯ. ფონ ნეიმანმა [1], მაგრამ შრომათა მიმართულება, რომელიც დაკავშირებულია ქცევის ავტომატური მოდელების აგებასთან, ჩამოყალიბებულ და განვითარებულ იქნა მ. ცეტლინის მიერ [2].

შრომათა შემდგომი მიმართულება კი დაკავშირებული იყო პირველ რიგში ისეთი მოდელების აგებასთან, რომელთაც აშკარა გამოყენებითი შინაარსი ჰქონდათ, ხოლო მეორეს მხრივ, მათემატიკური აპარატის განვითარებასთან, რომელიც ქცევის ანალიტიკური შედეგების შეფასების შესაძლებლობას იძლევა.

როგორც გამოკვლევებმა აჩვენა, ისეთი ავტომატის აგება, რომელიც რაიმე პარამეტრის მიმართ ოპტიმალურია ნებისმიერ გარემოში, პრაქტიკულად შეუძლებელია. ამიტომ მეტად მნიშვნელოვანია სხვადასხვა სახის ავტომატების კონსტრუქციების აგება და შემთხვევით გარემოში მათი ქცევის ალბათური მახასიათებლების გამოთვლის როგორც ანალიზური, ასევე რიცხვითი მეთოდების შემუშავება.

სამაგისტრო ნაშრომში განხილულია სპეციალური კლასის სასრული სტოქასტური ავტომატების ფუნქციონირება ისეთ სტაციონარულ შემთხვევით გარემოში, რომელიც ავტომატის მოქმედებაზე რეაგირებს საპასუხო რეაქციებით და
ეს რეაქციები ავტომატის მიერ აღიქმება როგორც ერთ-ერთი სახის რეაქცია შემდეგი სამი კლასის რეაქციიდან - სასურველი რეაქციების კლასი (მოგება, დაჯილდოება), არასასურველი რეაქციების კლასი (წაგება, დაჯარიმება) და ნეიტრალური რეაქციების კლასი (ინდიფერენტულობა). ასეთ გარემოში გადაწყვეტილია სასრული სტოქასტური ავტომატის ფუნქციონირების აღმწერი მარკოვის ჯაჭვის სპექტრის ლოკალიზაციის ამოცანა; მაწარმოებელ ფუნქციათა მეთოდზე დაყრდნობით დადგენილია ამ კლასის სასრული ავტომატების მიმდევრობის კრებადობა იმავე სტრუქტურის შესაბამისი უსასრულო ავტომატისაკენ და მოყვანილია სასრული სტოქასტური ავტომატების შესაძლებელი ასიმპტოტური ქცევის სრული კლასიფიკაცია; განხილულია აგრეთვე უფრო ფართო კლასის უსასრულო სტოქასტური ავტომატის ფუნქციონირება სამი კლასის რეაქციის მქონე სტაციონარულ შემთხვევით გარემოში და შემუშავებულია მისი ქცევის ალბათური მახასიათებლების გამოსათვლელი რიცხვითი ალგორითმი. აღნიშნულ საკითხებზე ჩატარებულია მანქანური ექსპერიმენტები და მოყვანილია ამ ექსპერიმენტების ანალიზი.

§ 1. ზოგადი ცნებები სტაციონარულ შემთხვევით გარემოში სასრული და უსასრულო ავტომატების ფუნქციონირების შესახებ

ავტომატის ქვეშ იგულისხმება რაიმე მოწყობილობა, რომელიც ფუნქციონირებს დისკრეტული დროის $t = 1,2,\dots$ მომენტებში და გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

ა) ამ მოწყობილობას გააჩნია შიგა მდგომარეობათა სასრული ან თვლადი სიმრავლე. დროის ყოველ t მომენტში ავტომატი იმყოფება ამ მდგომარეობებიდან ერთ-ერთში.

ბ) ავტომატს შეუძლია შეასრულოს სასრული რაოდენობის რაიმე მოქმედება, რომლის არჩევაც დამოკიდებულია ავტომატის შიგა მდგომარეობაზე.

გ) ავტომატს შესასვლელზე შეუძლია მიიღოს სასრული რაოდენობის შემავალი სიგნალები და მიღებულ სიგნალებზე დამოკიდებულებით ცვალოს თავისი შიგა მდგომარეობები.

მაშასადამე, სტოქასტური (ალბათური) ავტომატი ფორმალურად განიმარტება როგორც

$$A_k = < S, F_k, \pi_0, A(s), \mu(f/x) >$$

სისტემა, სადაც $S = \{s_1, s_2, \dots, s_g\}$ შემავალი სიგნალების სასრული სიმრავლეა; $F_k = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ - გამომავალი სიგნალების (მოქმედებების) სასრული სიმრავლე; $L = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ - შიგა მდგომარეობათა სასრული ან თვლადი სიმრავლე; π_0 - მდგომარეობათა ალბათობების საწყისი (სასტარტო) განაწილება; $A(s)$- გადასვლის ფუნქცია, რომელიც მოიცემა სასრულგანზომილებიანი ან თვლადგანზომილებიანი გადასვლის ალბათობების $(a_{ij}(s))$ სტოქასტური მატრიცებით, სადაც

$$a_{ij}(s) = P(x(t+1) = x_j \,/\, x(t) = x_i);$$

$\mu(f/x)$- გამოსასვლელის ფუნქცია (პირობითი ალბათური განაწილება F_k- ზე), რომელიც იძლევა $L \rightarrow F_k$ ალბათურ ასახვას.

[4]-ის მიხედვით შევუსაბამოთ A_k სტოქასტურ ავტომატს

$$A_{k,\alpha} = \langle\, S,\, F_k,\, L_\alpha,\, A^\alpha(s) \,\rangle\,, \alpha = 1,2,\dots,k$$

ქვეავტომატები ერთადერთი f_α გამოსასვლელით და L_α ქვესიმრავლეზე ინდუცირებული $A^\alpha(s)$ გადასვლის ფუნქციებით.

ჩამოვაყალიბოთ ზოგიერთი დაშვება A_k ავტომატის სტრუქტურის შესახებ:

1) ყველა $A_{k,\alpha}$, $\alpha = 1,2,\dots,k$ ავტომატი იზომორფულია, ე.ი. განსხვავდებიან მხოლოდ მდგომარეობათა აღნიშვნით. აქედან გამომდინარეობს, რომ სასრულგანზომილებიან შემთხვევაში მდგომარეობათა L_α , $\alpha = 1,2,\dots,k$ ქვესიმრავლეებს გააჩნიათ ელემენტების ერთი და იგივე რაოდენობა და A_k ავტომატის მდგომარეობათა L სიმრავლე წარმოადგენს $A_{k,\alpha}$ ქვეავტომატების მდგომარეობათა სიმრავლეების არაგადამკვეთი ქვესიმრავლეების გაერთიანებას:

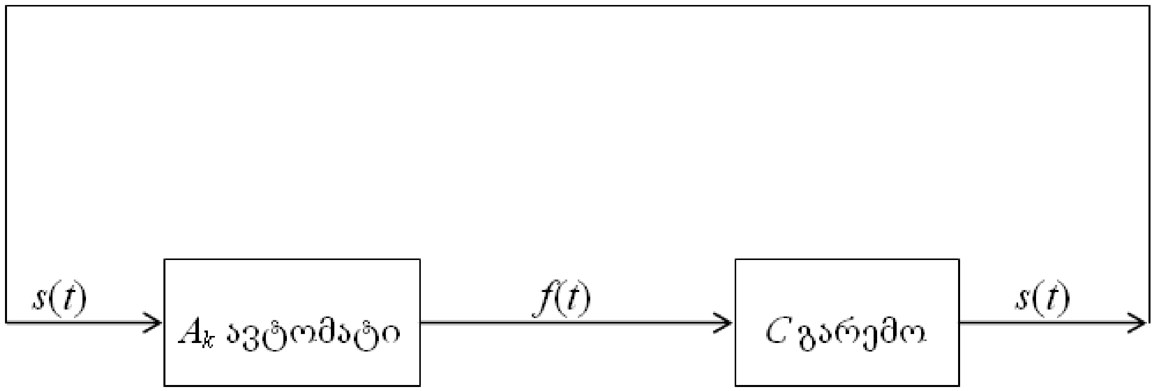
$$L = \sum_{\alpha=1}^{k} L_\alpha.$$

2) $L_\alpha \epsilon\, L$ მდგომარეობათა ნებისმიერი ქვესიმრავლიდან შესაძლებელია მდგომარეობათა ნებისმიერ სხვა $L_\beta \epsilon\, L$, $\alpha \neq \beta$ ქვესიმრავლეში გადასვლა.

შემდგომში მდგომარეობათა L_α ქვესიმრავლიდან მდგომარეობათა $L_{\alpha+1}$ ქვესიმრავლეში გადასვლისას გავითვალისწინებთ მხოლოდ ციკლურ გადასვლებს (სიმბოლურად $L_\alpha \to L_{\alpha+1}$, $\alpha = 1,2,\dots,k-1$, $L_k \to L_1$), ხოლო $A_k^{(n)}$ და A_k სიმბოლოებით ავღნიშნავთ შესაბამისად სასრული და უსასრულო (მდგომარეობათა თვლადი რიცხვით) ავტომატებს, $L^{(n)}$ და L_α სიმბოლოებით კი მათ მდგომარეობათა სიმრავლეს. ცხადია, რომ

$$L^{(n)} = \sum_{\alpha=1}^{k} L_\alpha^{(n)}.$$

ავტომატის ქცევა შემთხვევით C გარემოში ნიშნავს, რომ ავტომატის გამომავალი სიგნალები (მოქმედებები) წარმოადგენენ შემავალ სიგნალებს რაიმე C მოწყობილობისათვის. C გარემო ავტომატის ქცევაზე რეაგირებს საპასუხო რეაქციებით, რომლებიც ავტომატისათვის წარმოადგენს შემავალ სიგნალებს, ხოლო ავტომატი მათ იყენებს შემდგომი გადაწყვეტილებების მისაღებად (ნახ.1). ასე, რომ გარემოს პარამეტრები ავტომატისათვის წინასწარ უცნობია. იგი გარემოსაგან ღებულობს ინფორმაციას მხოლოდ იმის შესახებ, თუ როგორი რეაგირება მოახდინა გარემომ მის მიერ შესრულებულ მოქმედებაზე.



ნახ.1

ვიგულისხმოთ, რომ C გარემოს ყველა შესაძლებელი $S \in \{s_1, s_2, \dots, s_g\}$ რეაქცია ავტომატის მიერ აღიქმება, როგორც ერთ-ერთი სახის რეაქცია შემდეგი სამი კლასიდან - სასურველი რეაქციების კლასი (მოგება, დაჯილდოება, $s = +1$), არასასურველი რეაქციების კლასი (წაგება, დაჯარიმება, $s = -1$) და ნეიტრალური რეაქციების კლასი (ინდიფერენტულობა, $s = 0$).

ვიტყვით, რომ ავტომატი მოწყობილია მიზანშეწონილად, თუ იგი ხშირად იგებს და იშვიათად აგებს. ცხადია, რომ ავტომატის მიზანშეწონილობა იზრდება სასურველი რეაქციების (მოგება) რიცხვის გაზრდითა და არასასურველი რეაქციების (წაგება)რიცხვის შემცირებით.

განმარტება 1. ვიტყვით, რომ A_k ავტომატი ფუნქციონირებს სტაციონარულ $C = C(a_1, r_1; a_2, r_2; \dots; a_k, r_k)$ შემთხვევით გარემოში, თუ ავტომატის ქცევა და შემავალი სიგნალის მნიშვნელობები ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგნაირად: ავტომატის მიერ დროის t მომენტში შესრულებული f_α მოქმედება ავტომატის შესასვლელზე იწვევს დროის შემდგომ t+1 მომენტში $s = +1$ სიგნალის (მოგება) მოსვლას $q_\alpha = \frac{1 - r_\alpha + a_\alpha}{2}$ ალბათობით, $s = -1$ სიგნალის (წაგება) მოსვლას $p_\alpha = \frac{1 - r_\alpha - a_\alpha}{2}$ ალბათობით და $s = 0$ სიგნალის (ინდიფერენტულობა) მოსვლას $r_\alpha = 1 - q_\alpha - p_\alpha$ $(\alpha = 1,2, \dots, k)$ ალბათობით.

აქ $a_\alpha = q_\alpha - p_\alpha$ $(|a_\alpha| < 1 - r_\alpha,\ \alpha = 1,2, \dots, k)$ სიდიდეს აქვს f_α მოქმედების შესრულებისას მოგების მათემატიკური მოლოდინის აზრი.

განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს ისეთი ავტომატები, რომელთა ქცევა მიზანშეწონილია და რომელთა სტრუქტურაშიც არავითარი ინფორმაცია არაა იმის შესახებ, თუ როგორ სტაციონარულ გარემოში უხდებათ მათ ფუნქციონირება. ასეთი ავტომატების სტრუქტურა უნდა უზრუნველყოფდეს სიმეტრიულობის თვისებას: ავტომატის მიერ სხვადასხვა მოქმედების შესრულებისას ავტომატის შესასვლელზე შემავალი სიგნალების ერთი და იგივე მიმდევრობის შემთხვევაში ავტომატის ქცევა უნდა იყოს ერთნაირი.

ვთქვათ $x_i^\alpha \epsilon L_\alpha$, $\alpha = 1,2,\dots,k,\ i = 1,2,\dots,n$ $A_{k,\alpha}$ ქვეავტომატების ისეთი მდგომარეობებია, რომ $F(x_i^\alpha) = f_\alpha$.

[2]-ის ანალოგიურად, x_i^α მდგომარეობის სიღრმე ვუწოდოთ შემავალი სიგნალების უმცირეს სიგრძეს, რომელსაც x_i^α მდგომარეობა გამოჰყავს L_α ქვესიმრავლიდან. A_k ავტომატის $d(A_k)$ სიღრმე ვუწოდოთ მდგომარეობათა სიღრმეებს შორის უდიდესს. ცხადია, რომ $d(A_k) \le n$, სადაც n არის $A_{k,\alpha}$ ქვეავტომატის მდგომარეობათა რაოდენობა.

შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ ისეთი სასრული ავტომატების ფუნქციონირებას სტაციონარულ შემთხვევით გარემოში, რომელთა $d(A_k)$ სიღრმე ემთხვევა მდგომარეობათა n რაოდენობას: $d(A_k) = n$.

A_k ავტომატის ფუნქციონირება სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1, r_1; a_2, r_2; \dots; a_k, r_k)$ გარემოში აღიწერება მარკოვის ჯაჭვებით. ჩვენთვის საინტერესო შემთხვევებში ეს ჯაჭვები ერგოდულია. მაშასადამე, აღნიშნულ გარემოში არსებობს ავტომატის მდგომარეობათა ფინალური ალბათობები, რომლებიც არაა დამოკიდებული საწყის მდგომარეობაზე. შესაბამისად, სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1, r_1; a_2, r_2; \dots; a_k, r_k)$ გარემოში A_k ავტომატის მოგების მათემატიკური $M(A_k; C)$ მოლოდინი გამოისახება ფორმულით [2]:

$$M(A_k; C) = \sum_{\alpha=1}^{k} \sigma_\alpha a_\alpha,$$

სადაც σ_α, $\sum_{\alpha=1}^{k} \sigma_\alpha = 1$ სიდიდეებს აქვს A_k ავტომატის მიერ სტაციონარულ შემთხვევით გარემოში f_α მოქმედების შესრულების ალბათობის აზრი.

განმარტება 2. A_k ავტომატის ქცევა სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1, r_1; a_2, r_2; \dots; a_k, r_k)$ გარემოში მიზანშეწონილია, თუ $M(A_k; C) > M_0$; არაა მიზანშეწონილი, თუ $M(A_k; C) < M_0$; ინდიფერენტულია, თუ $M(A_k; C) = M_0$.

აქ

$$M_0 = \frac{1}{k}\sum_{\alpha=1}^{k} a_\alpha$$

ისეთი ავტომატის მოგების მათემატიკური მოლოდინია, რომელიც თავის მოქმედებას ირჩევს გარემოს რეაქციებისაგან დამოუკიდებლად და თანაბარალბათურად.

ცხადია, რომ

$$\min_\alpha a_\alpha < M(A_k; C) < \max_\alpha a_\alpha \ ,$$

მაგრამ შეიძლება ავაგოთ სასრული ავტომატების ისეთი მიმდევრობები, რომ ავტომატის მოგების მათემატიკურმა მოლოდინმა მიაღწიოს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ასეთ მიმდევრობებს ეწოდებათ ასიმპტოტურად ოპტიმალური მიმდევრობები.

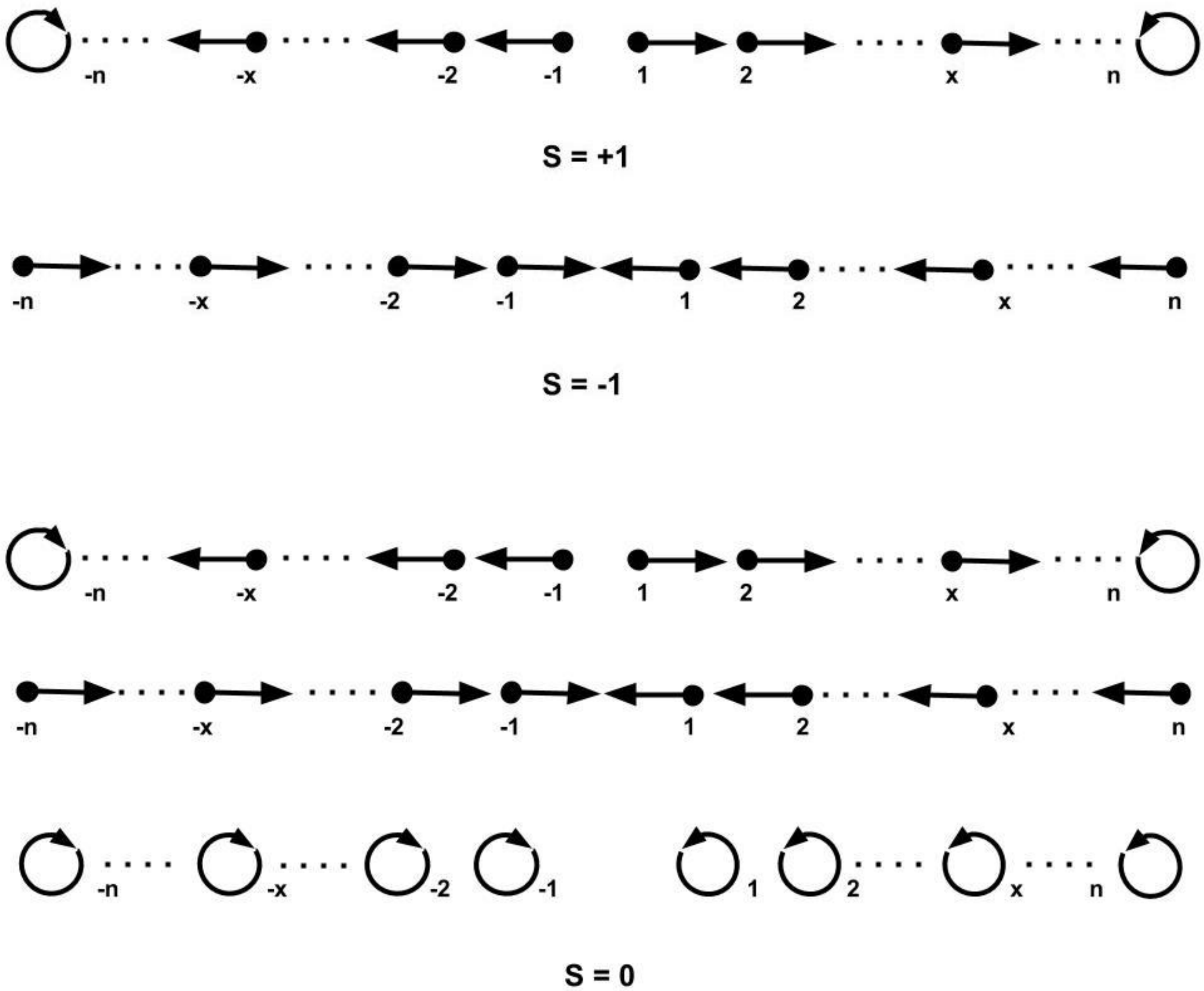
§ 2. სასრული სტოქასტური $T_{2n,2}^{(x)}(\mathbf{1},\mathbf{1};\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\eta})$ ავტომატის ფუნქციონირების აღმწერი მარკოვის ჯაჭვის საკუთრივი მნიშვნელობები

იმ მატრიცების სპექტრის (საკუთრივ მნიშვნელობათა სიმრავლის) ცოდნას, რომლებიც აღწერენ ავტომატების ფუნქციონირებას სტაციონარულ შემთხვევით გარემოში, მეტად საჭირო მნიშვნელობა აქვს ამ გარემოში ავტომატების შესაძლებელი ასიმპტოტური ქცევის ანალიზისათვის.

ვთქვათ $T_{2n,2}^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ $(0 \le \varepsilon,\eta \le 1,\ 0 \le \varepsilon + \eta \le 1)$ სასრული სტოქასტური ავტომატი $L^{(n)} = L_1^{(n)} \cup L_2^{(n)} = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$ შიგა მდგომარეობებითა და ორი $F_2 = \{f_1, f_2\}$ მოქმედებით ფუნქციონირებს სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1, r_1; a_2, r_2)$ გარემოში. ავტომატი იმ მდგომარეობებში ყოფნისას, რომელთა ნომერია $x = \{-\text{n}, \dots -2, -1\}$ ასრულებს პირველ მოქმედებას, ხოლო იმ მდგომარეობებში ყოფნისას, რომელთა ნომერია $x = \{1,2,\dots,n\}$ - მეორეს. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $a_1 > a_2$, ე.ი. ავტომატის პირველი მოქმედება უკეთესია, ვიდრე მეორე.

სასრული სტოქასტური $T_{2n,2}^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატის მდგომარეობებს შორის გადასვლა განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: ავტომატის შესასვლელზე $s = +1$ სიგნალის მოსვლის შემთხვევაში $x = i$ და $x = -i$ $(i = 1,2,\dots,n-1)$ მდგომარეობები შესაბამისად გადადიან $x = i+1$ და $x = -(i+1)$ მდგომარეობებში, ხოლო $|x| = n$ მდგომარეობები თავის თავში; $s = -1$

სიგნალის მოსვლის შემთხვევაში $x = i$ და $x = -i$ $(i = 2, \dots, n)$ მდგომარეობები შესაბამისად გადადიან $x = i - 1$ და $x = -(i - 1)$ მდგომარეობებში; $x = 1$ მდგომარეობა გადადის $x = -1$ მდგომარეობაში, ხოლო $x = -1$ მდგომარეობა - $x = 1$ მდგომარეობაში ; $s = 0$ სიგნალის მოსვლისას ყველა $x = i$ $(i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n)$ მდგომარეობა $1 - \varepsilon - \eta$ ალბათობით რჩება თავის თავში, ხოლო ε და η ალბათობებით მდგომარეობებს შორის გადასვლა შესაბამისად განისაზღვრება ისევე, როგორც $s = -1$ და $s = +1$ სიგნალის მოსვლის შემთხვევაში (ნახ.2).



ნახ.2. სასრული სტოქასტური $T^{(1)}_{2n,2}(\varepsilon, \eta)$ ავტომატის

მდგომარეობებს შორის გადასვლის გრაფი

მაშასადამე, სასრული სტოქასტური $T_{2n,2}^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატი ერთშესასვლელიანი და ერთგასასვლელიანია [4]: თითოეულ მოქმედებაში შემავალ მდგომარეობას წარმოადგენს ნებისმიერი ერთი x მდგომარეობა, ხოლო გამოსასვლელია $|x| = 1$ მდგომარეობა.

$|\hat{P} - \lambda E| = 0$ მახასიათებელი განტოლებიდან, ანალოგიურად [5] -სა, მიიღება სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$ გარემოში სასრული სტოქასტური $T_{2n,2}^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატის ფუნქციონირებით წარმოქმნილი მარკოვის $\hat{P}$ ჯაჭვის საკუთარი λ მნიშვნელობების განსაზღვრისათვის განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \dfrac{P_1\{\cos(x-1)\varphi - \sin(x-1)\varphi\ ctgn\varphi\} - \sqrt{P_1Q_1}\{\cos x\varphi - \sin x\varphi\ ctgn\varphi\}}{\sum_{k=0}^{x-1}\left(\frac{Q_1}{P_1}\right)^{\frac{x-1-k}{2}}(\cos k\varphi - \sin k\varphi\ ctgn\varphi)} + \\ \qquad + \dfrac{\sqrt{P_2Q_2}\{\cos\theta + \sin\theta\ ctgn\theta\} - Q_2}{\sum_{k=0}^{x-1}\left(\frac{Q_2}{P_2}\right)^{\frac{k}{2}}(\cos k\theta - \sin k\theta\ ctgn\theta)} = 0, \\ \lambda = 2\sqrt{P_1Q_1}\ \cos\varphi + R_1 = 2\sqrt{P_2Q_2}\cos\theta + R_2\ , \\ x = 1,2,\dots,n. \end{cases} \tag{1}$$

აქ E - $2n \times 2n$ რიგის ერთეულოვანი მატრიცაა, ხოლო

$$P_\alpha = p_\alpha + \varepsilon r_\alpha,\quad Q_\alpha = q_\alpha + \eta r_\alpha,\quad R_\alpha = (1-\varepsilon-\eta)r_\alpha,\quad 0 \le \varepsilon,\eta \le 1,\ 0 \le \varepsilon + \eta \le 1,$$

$$q_\alpha + p_\alpha + r_\alpha = 1,\ \alpha = 1,2$$

როგორც ცნობილია, მარკოვის ჯაჭვის საკუთრივი მნიშვნელობების (ზოგადად კომპლექსური) მოდული არასოდეს არ აღემატება 1-ს.

(1)-დან ეგრევე ვღებულობთ $\lambda = 1$ საკუთრივ მნიშვნელობას, რომელსაც შეესაბამება განსახილველი მარკოვის ჯაჭვის ფინალური ალბათობების ვექტორი.

(1) სისტემის სხვა ამონახსნებზე მნიშვნელოვან გავლენას ახდენს $T_{2n,2}^{(j)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატისა და $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$ გარემოს პარამეტრებს შორის თანაფარდობა. ამიტომ ცალ-ცალკე განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1. $Q_\alpha > P_\alpha$ $[a_\alpha > (\varepsilon-\eta)r_\alpha]$, $\alpha = 1,2$;
2. $Q_1 > P_1$, $Q_2 < P_2$ $[a_1 > (\varepsilon-\eta)r_1,\ a_2 < (\varepsilon-\eta)r_2]$.

$Q_\alpha < P_\alpha$ $[a_\alpha < (\varepsilon-\eta)r_\alpha]$, $\alpha = 1,2$ შემთხვევა Q_α-ს P_α-თი და P_α-ს Q_α-თი შეცვლით დაიყვანება 1 შემთხვევაზე, ხოლო $Q_1 < P_1$, $Q_2 > P_2$ შემთხვევა 1 და 2 ინდექსების ურთიერთშეცვლით - 2 შემთხვევაზე.

სისტემის გამოკვლევა გვარწმუნებს, რომ $|\lambda_n| \to 1$ საკუთრივი მნიშვნელობა

არსებობს მხოლოდ $Q_\alpha > P_\alpha$ შემთხვევაში, ე.ი. $a_\alpha > (\varepsilon - \eta) r_\alpha,\ \alpha = 1{,}2$ შემთხვევაში.

$$z = \lambda/\gamma\ , \qquad \gamma = \max(2\sqrt{Q_1P_1} + R_1, 2\sqrt{Q_2P_2} + R_2)$$

ახალი ცვლადის შემოღებით მცირეოდენი გარდაქმნით (1) სისტემა მიიყვანება შემდეგ სახეზე

$$\gamma z = 2\sqrt{Q_1P_1}\ \cos\varphi + R_1 = 2\sqrt{Q_2P_2}\ \cos\theta + R_2,$$

$$(1 - \gamma z)\left\{\sum_{k=0}^{j-1} {\beta_1}^{n-k}\frac{\sin(n-k)\varphi}{\sin\varphi}\ \sum_{k=0}^{n-1} {\beta_2}^{n-k}\frac{\sin(n-k)\theta}{\sin\theta} + \sum_{k=j}^{n-1} {\beta_1}^{n-k}\frac{\sin(n-k)\varphi}{\sin\varphi}\ \sum_{k=0}^{j-1} {\beta_2}^{n-k}\frac{\sin(n-k)\theta}{\sin\theta}\right\} =$$

$$= \sqrt{Q_1P_1}\sum_{k=0}^{j-1} {\beta_2}^{n-k}\frac{\sin(n-k)\theta}{\sin\theta} + \sqrt{Q_2P_2}\ \sum_{k=0}^{j-1} {\beta_1}^{n-k}\frac{\sin(n-k)\varphi}{\sin\varphi}.$$

ამ სისტემის მეორე განტოლების რიგი z პარამეტრის მიმართ არის $2n-1$.

თუ ავღნიშნავთ

$$f(z) = (1 - \gamma z)\left\{\sum_{k=0}^{j-1} {\beta_1}^{n-k}\frac{\sin(n-k)\varphi}{\sin\varphi}\ \sum_{k=0}^{n-1} {\beta_2}^{n-k}\frac{\sin(n-k)\theta}{\sin\theta} + \sum_{k=j}^{n-1} {\beta_1}^{n-k}\frac{\sin(n-k)\varphi}{\sin\varphi}\ \sum_{k=0}^{j-1} {\beta_2}^{n-k}\frac{\sin(n-k)\theta}{\sin\theta}\right\},$$

$$g(z) = -\left\{\sqrt{Q_1P_1}\sum_{k=0}^{j-1} {\beta_2}^{n-k}\frac{\sin(n-k)\theta}{\sin\theta} + \sqrt{Q_2P_2}\ \sum_{k=0}^{j-1} {\beta_1}^{n-k}\frac{\sin(n-k)\varphi}{\sin\varphi}\right\},$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $|z| = 1$ საზღვარზე საკმაოდ დიდი n - სათვის $|f(z)| > |g(z)|$ და რუშეს თეორემის თანახმად $f(z)$ და $F(z) = f(z) + g(z)$ ფუნქციებს $|z| = 1$ წრეში აქვთ ერთი და იმავე რაოდენობის ფესვები. $f(z)$- ის ფესვები $|z| = 1$ წრეში ტოლია $2n-2$. ეს ნიშნავს, რომ სისტემას $|z| = 1$ წრეში აქვს $2n-2$ ფესვი. λ პარამეტრზე დაბრუნებით მივიღებთ, რომ (1) სისტემის $2n-2$ საკუთრივი მნიშვნელობისათვის ადგილი აქვს შეფასებას

$$-\max\left(2\sqrt{Q_\alpha P_\alpha} + R_\alpha\right) < \lambda < \max\left(2\sqrt{Q_\alpha P_\alpha} + R_\alpha\right),\ \ \alpha = 1{,}2.$$

დარჩენილი ერთადერთი λ_n ფესვი კი მდებარეობს

$$\max\left(2\sqrt{Q_\alpha P_\alpha} + R_\alpha\right) \le |\lambda| < 1,\ \ \alpha = 1{,}2$$

წრეში და მისთვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება: როცა $Q_\alpha > P_\alpha$, $\alpha = 1{,}2,\qquad \lambda_n = 1 - \xi_n$ და

$$\xi_n = \frac{\frac{P_1}{Q_1}\frac{P_2}{Q_2}\left\{\frac{(Q_1-P_1)^2}{P_1}\left[\left(\frac{Q_2}{P_2}\right)^j - 1\right]\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^n\left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^{j-1} + \frac{(Q_2-P_2)^2}{P_2}\left[\left(\frac{Q_1}{P_1}\right)^j - 1\right]\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{j-1}\left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^n\right\}}{1-\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^j\left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^j} +$$

$$+\,0\left[\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^n + \left(\frac{P_2}{Q_2}\right)^n\right]^2 \qquad (2)$$

და

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0.$$

მაშასადამე, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. სასრული სტოქასტური $T_{2n,2}^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატისათვის, რომელიც ფუნქციონირებს სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$ გარემოში, გარდა ყოველთვის არსებული ერთის ტოლი საკუთარი მნიშვნელობისა, არსებობს ზუსტად ერთი საკუთარი მნიშვნელობა, რომელიც იმ შემთხვევაში, როცა $a_\alpha > (\varepsilon-\eta)r_\alpha$ (ე.ი. $Q_\alpha > P_\alpha$), $\alpha = 1,2$, $n \to \infty$, მიისწრაფის 1-კენ, ხოლო დანარჩენი საკუთარი მნიშვნელობების მოდული ნებისმიერი n-თვის შემოსაზღვრულია 1-ზე ნაკლები რიცხვით. ამ საკუთარ მნიშვნელობას, რომელიც მიისწრაფის 1-კენ, როცა $n \to \infty$, აქვს $\lambda_n = 1-\omega_n$ სახე და მისთვის სამართლიანია (2) შეფასება.

კერძო შემთხვევაში, როცა $x = 1$ $\hat{P}$ მატრიცა არის იაკობის მატრიცა. შესაბამისად, (1) სისტემის ყველა λ ფესვი ნამდვილია. დავუშვათ, რომ $\varepsilon = \eta$, $r_1 = r_2$, $p_1 = q_2$, $p_2 = q_1$. მაშინ (1) სისტემის პირველი განტოლება მიიყვანება

$$T_n\left(\frac{\lambda-R}{2\sqrt{QP}}\right)U_{n-1}\left(\frac{\lambda-R}{2\sqrt{QP}}\right) = 0$$

სახეზე, სადაც $T_n(z)$ и $U_n(z)$ შესაბამისად ჩებიშევის I და II გვარის პოლინომებია:

$$T_n(z) = \cos n \arccos z, \quad U_n(z) = \frac{\sin(n+1)\arccos z}{\sqrt{1-z^2}}.$$

(2) განტოლების λ ამონახსნები ადვილად მიიღება და აქვთ სახე:

$$\begin{cases} \lambda_k = 2\sqrt{QP}\cos\dfrac{k\pi}{2} + R, \; k = 1,2,\dots,n-1, \\ \lambda_l = 2\sqrt{QP}\cos\dfrac{2l+1}{2n}\pi + R, \; l = 0,1,\dots,n-1. \end{cases}$$

ცხრილი 1-ში მოყვანილია შემთხვევითი გარემოს პარამეტრებსა და ავტომატის მეხსიერებაზე დამოკიდებული (2) ფორმულით მიღებული $\boldsymbol{\xi_n}$ - ის მნიშვნელობები

$r1$	$r2$	$a1$	$a2$	η	ε	n	j	ξ_n
0.4	0.1	0.5	0.7	0.3	0.5	10	1	0.000121150787096802
0.4	0.1	0.5	0.7	0.3	0.5	10	10	0.000137952030455067
0.4	0.1	0.5	0.7	0.3	0.5	20	1	6.33110411144713E-10

0.4	0.1	0.5	0.7	0.3	0.5	20	20	7.20656588136727E-10
0.4	0.1	0.5	0.7	0.3	0.5	30	1	3.31231140870411E-14
0.4	0.1	0.5	0.7	0.3	0.5	30	30	3.77033515553105E-14
0.4	0.1	0.5	0.7	0.3	0.5	40	1	1.73293877749331E-18
0.4	0.1	0.5	0.7	0.3	0.5	40	40	1.9725681519055E-18

ცხრილი 1

როგორც ამ ცხრილიდან ჩანს, პრაქტიკულად მოდულით 1-თთან ახლოს მყოფი საკუთრივი რიცხვი 1-საგან $n = 10$ მეხსიერების შემთხვევაში 10^{-5}, ხოლო $n = 20$ მეხსიერების შემთხვევაში 10^{-10} სიდიდით განსხვავდება. შესაბამისად, სასრული ავტომატის საკმაოდ მცირე მეხსიერების შემთხვევაშიც კი ირღვევა მარკოვის ჯაჭვის ერგოდულობა. ამ შემთხვევაში არ არსებობს შესაბამისი ჯაჭვის სტაციონარული განაწილება და სტაციონარულ შემთხვევით გარემოში სასრული ავტომატის შესაძლებელი ასიმპტოტური ქცევის ანალიზის ტრადიციული მიდგომა, რომელიც სწორედ ჯაჭვის ფინალურ ალბათობებზეა დაფუძნებული, გამოუსადეგარია.

§ 3. სტაციონარულ შემთხვევით $\boldsymbol{C(a_1, r_1; a_2, r_2)}$ გარემოში უსასრულო სტოქასტური $\boldsymbol{T_2^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)}$ ავტომატის ქცევა

სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1, r_1; a_2, r_2; \dots; a_k, r_k)$ გარემოში სასრული ავტომატის შესაძლებელი ასიმპტოტური ქცევის ანალიზისათვის გამოვიყენოთ მეთოდიკა, რომელიც ეფუძნება სასრული ავტომატის მოქმედების შეცვლის ალბათობის მაწარმოებელი ფუნქციის კრებადობის (როცა ავტომატის მეხსიერება $n \to \infty$) დადგენას იმავე სტრუქტურის უსასრულო ავტომატის შესაბამისი მაწარმოებელი ფუნქციისაკენ [3]. ამ პროგრამის რეალიზაციაში მნიშვნელოვანია შემდეგი მახასიათებლები: f_α მოქმედების შეცვლის (ოდესმე) σ_α ალბათობა და f_α მოქმედების შეცვლამდე შემთხვევითი τ_α დროის მათემატიკური მოლოდინი $x \in L_\alpha$, $\alpha = 1,2\dots, k$ მდგომარეობიდან სტარტის დროს.

ამ მახასიათებლების ტერმინებში A_k უსასრულო ავტომატის ქცევა სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1, r_1; a_2, r_2; \dots; a_k, r_k)$ გარემოში კლასიფიცირდება შემდეგი სახით [3,6].

განმარტება 3. ვიტყვით, რომ A_k ავტომატი, რომელიც ფუნქციონირებს სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1, r_1; a_2, r_2; \dots; a_k, r_k)$ გარემოში, არის:

ოპტიმალური, როცა $\sigma_{x,1} < 1,\ \sigma_{x,\alpha} = 1\ \left(\alpha = \overline{2;k}\right),\ \forall x;$

მკაცრად ოპტიმალური, როცა $\sigma_{x,1} < 1,\ \sigma_{x,\alpha} = 1,\ \tau_{x,\alpha} < \infty\ \left(\alpha = \overline{2;k}\right),\ \forall x;$

კვაზიოპტიმალური, როცა $\sigma_{x,\alpha} = 1,\ \alpha = 1,\dots,k, \tau_{x,1} = \infty,\ \tau_{x,\alpha} < \infty \left(\alpha = \overline{2;k}\right), \forall x;$

ჩამთრევი, როცა $\sigma_{x,\alpha} < 1\ ,\ \forall x,\alpha;$

გამომგდები, როცა $\sigma_{x,\alpha} = 1,\quad ,\ \tau_{x,\alpha} < \infty\ ,\ \forall x,\alpha;$

ანტიოპტიმალური, როცა $\sigma_{x,k} < 1,\ \sigma_{x,\alpha} = 1\ \left(\alpha = \overline{1;k-1}\right),\ \forall x;$

ანტიკვაზიოპტიმალური, როცა $\sigma_{x,\alpha} = 1,\ \alpha = \overline{1;k}\ ,\ \tau_{x,k} = \infty,\ \forall x.$

განვიხილოთ სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$ გარემოში უსასრულო სტოქასტური $T_2^{(x)}(1{,}1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატის ფუნქციონირება $L = L_1 \cup L_2 = \{\pm1,\pm2,\dots,\pm n,\dots\}$ შიგა მდგომარეობებითა და ორი $F_2 = \{f_1,f_2\}$ მოქმედებით. $T_2^{(x)}(1{,}1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატი იმ მდგომარეობებში ყოფნისას, რომელთა ნომერია $x = \{\dots,-\mathrm{n},\dots,-1\}$ ასრულებს პირველ მოქმედებას, ხოლო $x = \{1,2,\dots,n,\dots\}$ ნომრიან მდგომარეობებში ყოფნისას - მეორეს.

უსასრულო სტოქასტური $T_2^{(x)}(1{,}1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატის ქცევის ტაქტიკა ისეთივეა, როგორიც სასრული სტოქასტური $T_{2n,2}^{(x)}(1{,}1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატისა: $s = +1$ სიგნალის შემთხვევაში $x = i$ და $x = -i$ $(i = 1,2,\dots)$ მდგომარეობები შესაბამისად გადადიან $x = i+1$ და $x = -i-1$ მდგომარეობებში; $s = -1$ სიგნალის შემთხვევაში $x = i$ და $x = -i$ $(i = 2,3,\dots)$ მდგომარეობები შესაბამისად გადადიან $x = i-1$ და $x = -i+1$ მდგომარეობებში; $x = 1$ მდგომარეობა გადადის $x = -1$ მდგომარეობაში, ხოლო $x = -1$ მდგომარეობა - $x = 1$ მდგომარეობაში; $s = 0$ სიგნალის შემთხვევაში ყველა $x = i\ (i = \pm1,\pm2,\dots)$ მდგომარეობა $1-\varepsilon-\eta$ ალბათობით რჩება თავის თავში, ხოლო ε და η ალბათობებით მდგომარეობებს შორის გადასვლა შესაბამისად განისაზღვრება ისევე, როგორც $s = -1$ და $s = +1$ სიგნალის შემთხვევაში.

ავღნიშნოთ $u_{x,d}$ სიმბოლოთი იმის ალბათობა, რომ უსასრულო სტოქასტური $T_2^{(x)}(1{,}1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატი დროის d მომენტში პირველად შეცვლის f_α მოქმედებას L_α ქვესიმრავლის ნებისმიერი $x \in \{1,2,\dots\}$ მდგომარეობიდან სტარტის დროს.

მაშინ $u_{x,d}$ ალბათობების მიმართ გვექნება

$$u_{x,d+1} = Pu_{x-1,d} + Qu_{x+1,d} + Ru_{x,d},\ x = 1,2,\dots \qquad (3)$$
$$d = 0,1,2,\dots$$

სხვაობიანი განტოლება და $u_{x,d}$ სიდიდეების ალბათური აზრიდან გამომდინარე

$$u_{0,0} = 1, u_{x,0} = 0 \quad \forall x > 0 \tag{4}$$

სასაზღვრო პირობები.

(3) და (4) - დან მოქმედების შეცვლის მაწარმოებელი

$$U_x(z) = \sum_{d=0}^{\infty} u_{x,d}\, z^d$$

ფუნქციის მიმართ მივიღებთ შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას:

$$U_x(z) = \frac{Pz}{1-Rz} U_{x-1}(z) + \frac{Qz}{1-Rz} U_{x+1}(z), \quad x = 1,2,\ldots \tag{5}$$

$$U_0(z) = 1. \tag{6}$$

(5), (6) ამოცანის ამოხსნა ვეძებოთ

$$U_x(z) = \lambda^x(z) \tag{7}$$

სახით.

(7)-ის ჩასმით (5)-ში, $\lambda(z)$-ის მიმართ მივიღებთ მახასიათებელ განტოლებას

$$Qz\lambda^2(z) - (1 - Rz)\lambda(z) + Pz = 0 \tag{8}$$

რომლის $\lambda_i(z)$, $i = 1,2$ ფესვები ისეთია, რომ როცა $|z| < 1$ $(z \neq 0)$

$$|\lambda_1(z)| < 1, \ |\lambda_2(z)| > 1. \tag{9}$$

ამ ფესვების საშუალებით ნებისმიერი $A(z)$ და $B(z)$ ფუნქციებისათვის (5)-ის ზოგად ამონახსნს აქვს

$$U_x(z) = A(z)\, \lambda_1^x(z) + B(z)\, \lambda_2^x(z) \tag{10}$$

სახე.

$u_{x,d}$ სიდიდის ალბათური აზრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ როცა $|z| < 1$, მაშინ $\forall x > 0$

$$|\, U_x(z)| < 1.$$

შესაბამისად (9) -ე თვისებების გამო $\mathrm{B(z)} \equiv 0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში $U_x(z)$ იქნებოდა შემოუსაზღვრელი, როცა $n \to \infty$).

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე (7) მიიღებს

$$U_x(z) = A(z)\lambda_1^x(z)$$

სახეს.

ჩავსვათ ეს ამონახსნი (5)-ში და მივიღებთ, რომ $A(z) \equiv 1$. საბოლოოდ გვექნება

$$U_x(z) = \lambda_1^x(z).$$

განვსაზღვროთ ახლა σ_x და τ_x სტატისტიკური მახასიათებლები.

რადგანაც

$$\lambda_1(1) = \frac{P+Q-|P-Q|}{2Q} \ , \ \ \sigma_x = U_x(1) = \lambda_1^x(1),$$

ამიტომ

$$\sigma_x = \begin{cases} 1, & \text{როცა } P \geq Q; \\ (P/Q)^x < 1, & \text{როცა } P < Q. \end{cases}$$

როცა $P < Q$, ავტომატი დადებითი ალბათობით არ შეცვლის L ქვესიმრავლეს, ამიტომ ბუნებრივია დავუშვათ, რომ $\tau_x = +\infty$.

იმ შემთხვევაში, როცა $P \geq Q$, $\tau_x = \frac{dU_x(z)}{dz} \Big| z = 1 \ = \frac{x}{P-Q}$.

მაშასადამე, უსასრულო სტოქასტური $T_2^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატის ქცევის სტატისტიკური მახასიათებლებისათვის საბოლოოდ გვაქვს:

$$\sigma_{x,\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{როცა } \ P_\alpha \geq Q_\alpha, \\ \left(\frac{P_\alpha}{Q_\alpha}\right)^{|x|} < 1, & \text{როცა } \ P_\alpha < Q_\alpha, \end{cases}$$

$$\tau_{x,\alpha} = \begin{cases} \frac{|x|}{P_\alpha - Q_\alpha}, & \text{როცა } P_\alpha > Q_\alpha, \\ +\infty \ , & \text{როცა } P_\alpha \leq Q_\alpha. \end{cases} \quad (\alpha = 1,2).$$

მიღებული შედეგების შეჯამება და იმის გათვალისწინება, რომ $Q_\alpha > P_\alpha$ პირობა ეკვივალენტურია $a_\alpha > (\varepsilon - \eta) r_\alpha$, $\alpha = 1,2$ პირობისა, გვარწმუნებს შემდეგი მტკიცებულობის სამართლიანობაში.

თეორემა 2. უსასრულო სტოქასტური $T_2^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატის ქცევა $C(a_1, r_1; a_2, r_2)$ სტაციონარულ შემთხვევით გარემოში არის:

1)) თუ $(\varepsilon-\eta)(r_1 - r_2) < 0$, მაშინ, როცა $a_1 \leq (\varepsilon-\eta) r_1$, $a_2 > (\varepsilon-\eta) r_2 -$ ოპტიმალური: $\sigma_{x,1} = 1$, $\sigma_{x,2} < 1$, $\tau_{x,1} = \frac{|x|}{P_1 - Q_1}$, $\tau_{x,2} = \infty$;

როცა $a_1 < (\varepsilon-\eta) r_1$, $a_2 > (\varepsilon-\eta) r_2 -$ მკაცრად ოპტიმალური: $\sigma_{x,1} = 1$, $\sigma_{x,2} < 1$, $\tau_{x,1} = \frac{|x|}{P_1 - Q_1} < \infty$, $\tau_{x,2} = \infty$;

როცა $a_1 > (\varepsilon-\eta) r_1, a_2 \leq (\varepsilon-\eta) r_2 -$ ოპტიმალური ან ანტიოპტიმალური: $\sigma_{x,1} = \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{|x|} < 1$, $\sigma_{x,2} = 1$, $\tau_{x,1} = \infty, \tau_{x,2} = \frac{x}{P_2 - Q_2}$;

როცა $a_1 = (\varepsilon-\eta) r_1$, $a_2 < (\varepsilon-\eta) r_2 -$ კვაზიოპტიმალური ან ანტიკვაზიოპტიმალური: $\sigma_{x,\alpha} = 1$, $\alpha = 1,2$, $\tau_{x,1} = \infty$, $\tau_{x,2} = \frac{x}{P_2 - Q_2} < \infty$;

როცა $a_\alpha > (\varepsilon-\eta)r_\alpha -$ ჩამთრევი : $\sigma_{x,\alpha} = \left(\frac{P_\alpha}{Q_\alpha}\right)^{|x|} < 1$, $\tau_{x,\alpha} = \infty$, $\alpha = 1,2$;

როცა $a_\alpha < (\varepsilon-\eta)r_\alpha -$ გამომგდები: $\sigma_{x,\alpha} = 1$, $\tau_{x,\alpha} = \frac{|x|}{P_\alpha - Q_\alpha} < \infty$, $\alpha = 1,2$;

2) თუ $(\varepsilon-\eta)(r_1-r_2) \geq 0$, მაშინ, როცა $a_1 > (\varepsilon-\eta)r_1$, $a_2 \leq (\varepsilon-\eta)r_2 -$ ოპტიმალური: $\sigma_{x,1} = \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{|x|} < 1$, $\sigma_{x,2} = 1$, $\tau_{x,1} = \infty$, $\tau_{x,2} = \frac{x}{P_2 - Q_2}$;

როცა $a_1 > (\varepsilon-\eta)r_1$, $a_2 < (\varepsilon-\eta)r_2$ –მკაცრად ოპტიმალური: $\sigma_{x,1} = \left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{|x|} < 1$, $\sigma_{x,2} = 1$, $\tau_{x,1} = \infty$, $\tau_{x,2} = \frac{x}{P_2 - Q_2} < \infty$;

როცა $a_1 = (\varepsilon-\eta)r_1$, $a_2 < (\varepsilon-\eta)r_2$ –კვაზიოპტიმალური: $\sigma_{x,\alpha} = 1$, $\alpha = 1,2, \tau_{x,1} = \infty$, $\tau_{x,2} = \frac{x}{P_2 - Q_2} < \infty$;

როცა $a_\alpha > (\varepsilon-\eta)r_\alpha -$ ჩამთრევი: $\sigma_{x,\alpha} = \left(\frac{P_\alpha}{Q_\alpha}\right)^{|x|} < 1$, $\tau_{x,\alpha} = \infty$, $\alpha = 1,2$;

როცა $a_\alpha < (\varepsilon-\eta)r_\alpha -$ გამომგდები: $\sigma_{x,\alpha} = 1$, $\tau_{x,\alpha} = \frac{|x|}{P_\alpha - Q_\alpha} < \infty$, $\alpha = 1,2$.

სტოქასტური $T_2^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატი ε და η პარამეტრების მთელი მნიშვნელობებისათვის წარმოადგენს დეტერმინირებულ ავტომატს და სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$ გარემოში არსებობს მისი ქცევის სამი ძირითადი ფორმა (ტაქტიკა) [7,8] : $\varepsilon = 0, \eta = 1$- ქცევის პასიური ფორმა; $\varepsilon = 1, \eta = 0$ - ქცევის აქტიური ფორმა; $\varepsilon = 0, \eta = 0$ - ქცევის ბუნებრივი ფორმა.

§ 4. სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$ გარემოში სასრული სტოქასტური $T_{2n,2}^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატის ასიმპტოტური ქცევა

ავღნიშნოთ $u_{x,d}^{(n)}$ სიმბოლოთი ალბათობა იმისა, რომ სასრული $T_{2n,2}^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატი (n-ავტომატის მდგომარეობათა რიცხვია), რომელიც ფუნქციონირებს სტაციონარულ შემთხვევითც $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$ გარემოში, დროის d მომენტში პირველად შეცვლის f_α მოქმედებას, $L_\alpha^{(n)}$, $\alpha = 1,2$ ქვესიმრავლის ნებისმიერი $x \in \{1,2,\dots,n\}$ მდგომარეობიდან სტარტის დროს.

ავტომატის ქცევის ტაქტიკიდან გამომდინარე $u_{x,d}^{(n)}$ ალბათობების მიმართ გვექნება:

$$u_{x,d+1}^{(n)} = Pu_{x-1,d}^{(n)} + Qu_{x+1,d}^{(n)} + Ru_{x,d}^{(n)}, \quad x = 1,2,\dots,n, \ d = 0,1,2,\dots \tag{11}$$

და $u_{x,d}^{(n)}$ ალბათობების აზრიდან გამომდინარე

$$u_{0,0}^{(n)} = 1, \ u_{x,0}^{(n)} = 0 \ \ \forall\, x \in \{1,2,\dots,n\}, \quad u_{n,d}^{(n)} = u_{n+1,d}^{(n)}. \tag{12}$$

(11) და (12) - დან მოქმედების შეცვლის მაწარმოებელი

$$U_x^{(n)}(z) = \sum_{d=0}^{\infty} u_{x,d}^{(n)} z^d$$

ფუნქციის მიმართ მივიღებთ შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას:

$$U_x^{(n)}(z) = \frac{Pz}{1-Rz} U_{x-1}^{(n)}(z) + \frac{Qz}{1-Rz} U_{x+1}^{(n)}(z), \quad x = 1,2,\dots,n, \tag{13}$$

$$U_0^{(n)}(z) = 1, \ U_n^{(n)}(z) = U_{n+1}^{(n)}(z). \tag{14}$$

(11), (12) ამოცანის ამონახსნს წარმოადგენს

$$U_x^{(n)}(z) = \frac{\lambda_2^n(z)(\lambda_2(z)-1)\lambda_1^x(z) - \lambda_1^n(z)(\lambda_1(z)-1)\lambda_2^x(z)}{\lambda_2^n(z)(\lambda_2(z)-1) - \lambda_1^n(z)(\lambda_1(z)-1)}, \ i = 1,2,\dots,n. \tag{15}$$

სადაც $\lambda_i(z), \ i = 1,2$ არის (9) მახასიათებელი განტოლების ისეთი ფესვები, რომ როცა $|z| < 1 \ (z \neq 0)$

$$|\lambda_1(z)| < 1, \ |\lambda_2(z)| > 1.$$

(15) -ში ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ

$$\lim_{n\to\infty} U_x^{(n)}(z) = \lambda_1^x(z) = U_x(z).$$

მაშასადამე, სასრული ავტომატების $\left\{T_{2n,2}^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)\right\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა კრებადია იმავე სტრუქტურის უსასრულო $T_2^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ ავტომატისაკენ და, შესაბამისად, მისი ასიმპტოტური ქცევა სრულად განისაზღვრება შესაბამისი $T_2^{(x)}(1,1;\varepsilon,\eta)$ ზღვრული ავტომატის ქცევით [3].

§ 5. სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1, r_1; a_2, r_2)$ გარემოში უსასრულო სტოქასტური $T_2^{(x)}(l, 1; \varepsilon, \eta)$ ავტომატის ქცევის ალბათური მახასიათებლების გამოთვლის რიცხვითი ალგორითმი

განვიხილოთ ახლა ტერნარულ სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1, r_1; a_2, r_2)$ გარემოში უსასრულო სტოქასტური $T_2^{(x)}(l, 1; \varepsilon, \eta)$ ავტომატის ფუნქციონირება. ეს ავტომატი მხოლოდ იმით განსხვავდება $T_2^{(x)}(1,1; \varepsilon, \eta)$ ავტომატისაგან, რომ $s = +1$ სიგნალის მოსვლის შემთხვევაში $x = i$ და $x = -i$ $(i = 0,1,2, \dots)$ მდგომარეობები შესაბამისად გადადიან $x = i + l$ და $x = -(i + l)$ მდგომარეობებში.

სტაციონარულ შემთხვევით $C(a_1, r_1; a_2, r_2)$ გარემოში უსასრულო სტოქასტური $T_2^{(x)}(l, 1; \varepsilon, \eta)$ ავტომატის ქცევის ტაქტიკიდან გამომდინარე გვექნება შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა

$$U_x(z) = \frac{Pz}{1-Rz} U_{x-1}(z) + \frac{Qz}{1-Rz} U_{x+l}(z), \quad x = 1,2, \dots \tag{16}$$

$$U_{-1}(z) = 1.$$

$u_{x,d}$ სიდიდეების ალბთური აზრიდან გამომდინარეობს,რომ როცა $|z| < 1$ და $\forall x \geq 1$

$$|U_x(z)| < 1.$$

(16) განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ

$$U_x(z) = \lambda^{x+1}(z) \tag{17}$$

სახით.

(17) - ის (16)-ში ჩასმით მივიღებთ შემდეგ მახასიათებელ

$$Qz\lambda^{l+1}(z) - (1 - Rz)\lambda(z) + Pz = 0 \tag{18}$$

განტოლებას, რომლის $\lambda(z)$ ფესვებითაც გამოისახება (16) სასაზღვრო განტოლების ამონახსნი.

(18) განტოლების ფესვებისათვის სამართლიანია ლემა, რომლის დამტკიცებაც ეფუძნება რუშეს თეორემას.

ლემა. 1. $|z| < 1$ $(z \neq 0)$- თვის (18) განტოლების ყველა ფესვი მარტივია; ერთი $\lambda_1(z)$ ფესვი მდებარეობს კომპლექსური λ სიბრტყის ერთეულოვან k_1 წრეში, ხოლო დანარჩენი $\lambda_j(z)$, $j = \overline{2, l+1}$ ფესვი მის გარეთ.

2. როცა $P > lQ$: $\lambda_1(1) = 1$, $|\lambda_{j+1}(1)| > 1$, $j = \overline{1, l}$;

როცა $P = lQ$: $\lambda_1(1) = \lambda_2(1) = 1$, $|\lambda_{j+1}(1)| > 1$, $j = \overline{2, l}$;

როცა $P < lQ$: $\lambda_1(1) < 1$, $\lambda_2(1) = 1$, $|\lambda_{j+1}(1)| > 1$, $j = \overline{2, l}$.

(16) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, როცა $|z| < 1$ მოიცემა

$$U_x(z) = \sum_{j=1}^{l+1} A_j(z)\ \lambda_1^x(z)$$

ფორმულით, სადაც $A_j(z)$ $(j = \overline{1, l+1})$ ფუნქციები საჭიროებენ განსაზღვრას.

$|U_x(z)| \le 1$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობის, ლემისა და (16) სასაზღვრო პირობით საბოლოოდ გვექნება

$$U_x(z) = \lambda_1^{x+1}(z). \tag{19}$$

რადგანაც, როცა $P \ge lQ$ $\lambda_1(1) = 1$, ხოლო როცა $P < lQ$ $|\lambda_1(1)| < 1$, ამიტომ

$$\sigma_x = U_x(1) = \begin{cases} 1, & როცა\ P \ge lQ \\ \lambda_1^{x+1}(1) < 1, & როცა\ P < lQ \end{cases}.$$

f მოქმედების შეცვლამდე ავტომატის მიერ L ქვესიმრავლეში გატარებული τ_x დროის მათემატიკური ლოდინისათვის გვაქვს განტოლება

$$\tau_x = \frac{P}{Q+P}\tau_{x-1} + \frac{Q}{Q+P}\tau_{x+l} + \frac{1}{Q+P}, \quad \tau_{-1} = 0, \ x = \{0,1,2,\dots\}. \tag{20}$$

როცა $P > lQ$ (20) განტოლების კერძო ამონახსნია

$$\tau_x = \frac{x+1}{P-lQ}, \tag{21}$$

ხოლო ზოგადი ამონახსნი განისაზღვრება

$$\tau_x = \frac{x+1}{P-lQ} + \sum_{j=1}^{l+1} A_j(1)\ \lambda_j^{x+1}(1)$$

ფორმულით.

იმ ფაქტის გათვალისწინებით, რომ $\tau_x < \infty$ $A_j(1) = 0$, $j = \overline{2, l+1}$, რადგანაც როცა $P > lQ$ $|\lambda_j(1)| > 1$, $j = \overline{2, l+1}$ და τ_x არ იქნებოდა სასრული სიდიდე. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ $A_1(1) = 0$ და

$$\tau_x = \frac{x+1}{P-lQ}.$$

როცა $P = lQ$ $\tau_x = \infty$, ხოლო როცა $P < lQ$ $\sigma_x < 1$ და $\tau_x = \infty$.

მაშასადამე, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. $C(a_1,r_1;a_2,r_2)$ ტერნარულ სტაციონარულ შემთხვევით გარემოში $T_2^{(x)}(l,1;\varepsilon,\eta)$ უსასრულო სტოქასტური ავტომატისათვის სტატისტიკური მახასიათებლები განისაზღვრებიან ფორმულებით:

როცა $P_\alpha > lQ_\alpha$: $\sigma_{x,\alpha}=1$, $\tau_{x,\alpha}=\frac{|x|+1}{P_\alpha - lQ_\alpha}$;

როცა $P_\alpha = lQ_\alpha$: $\sigma_{x,\alpha}=1$, $\tau_{x,\alpha}=\infty$;

როცა $P_\alpha < lQ_\alpha$: $\sigma_{x,\alpha}=\lambda_1^{|x|+1}(1)$, $\tau_{x,\alpha}=\infty$ $(\alpha=1,2)$.

მოყვანილი ფორმულებიდან ჩანს, რომ $P_\alpha < lQ_\alpha$ შემთხვევაში f_α მოქმედების შეცვლის $\sigma_{x,\alpha}$ ალბათობა წარმოადგენს (8)-ე მახასიათებელი განტოლების უმცირესი ფესვის ფუნქციას, როცა $z=1$. აღნიშნული ალბათური მახასიათებლების საკმაოდ დიდი სიზუსტით მიახლოებითი გამოთვლისათვის შესაძლებელია ვისარგებლოთ ნიუტონ-პიუზეს ცნობილი დიაგრამით, რომელიც საშუალებას იძლევა მიმდევრობით გამოითვალოს $U_0(z)$ ანალიზური ფუნქციის გაშლის კოეფიციენტები. ამ მეთოდის მიმდევრობითი გამოყენება გვაძლევს $U_0(z)$ მაწარმოებელი ფუნქციის შემდეგ გაშლას:

$$U_0(z)=\frac{P_\alpha z}{1-R_\alpha z}+\frac{Q_\alpha z}{1-R_\alpha z}\left(\frac{P_\alpha z}{1-R_\alpha z}\right)^{l+1}+\ (l+1)\left(\frac{Q_\alpha z}{1-R_\alpha z}\right)^2\left(\frac{P_\alpha z}{1-R_\alpha z}\right)^{2l+1}\ +$$

$$+\frac{(l+1)(3l+2)}{2}\left(\frac{Q_\alpha z}{1-R_\alpha z}\right)^3\left(\frac{P_\alpha z}{1-R_\alpha z}\right)^{3l+1}+\cdots$$

სადაც

$$P_\alpha=p_\alpha+\varepsilon r_\alpha,\quad Q_\alpha=q_\alpha+\eta r_\alpha,\quad R_\alpha=(1-\varepsilon-\eta)r_\alpha,\quad \alpha=1,2.$$

ეს გაშლა საშუალებას იძლევა საკმაოდ დიდი სიზუსტით მიახლოებით გამოითვალოს $\sigma_{0,\alpha}$ როცა $l>2$. შესაკრებთა რაოდენობა დამოკიდებულია გარემოს პარამეტრებზე, l-ზე და სიზუსტის ხარისხზე.

კერძო შემთხვევაში, როცა:

$$l=1,\qquad \sigma_{0,\alpha}=\frac{P_\alpha}{Q_\alpha}\ ;\quad l=2,\qquad \sigma_{0,\alpha}=\frac{\sqrt{1+4\frac{P_\alpha}{Q_\alpha}}-1}{2}, \tag{**}$$

ხოლო როცა $l\geq 3$:

$$\sigma_{0,\alpha} = U_0(1) = \frac{P_\alpha}{1-R_\alpha} + \frac{Q_\alpha}{1-R_\alpha}\left(\frac{P_\alpha}{1-R_\alpha}\right)^{l+1} + \ (l+1)\left(\frac{Q_\alpha}{1-R_\alpha}\right)^2\left(\frac{P_\alpha}{1-R_\alpha}\right)^{2l+1} +$$

$$+\frac{(l+1)(3l+2)}{2}\left(\frac{Q_\alpha}{1-R_\alpha}\right)^3\left(\frac{P_\alpha}{1-R_\alpha}\right)^{3l+1} + \cdots$$

ცხრილი 2-ში მოყვანილია $\sigma_{0,\alpha}-$ს მნიშვნელობები $U_0(1)-$ის გაშლისა და **(**)** ფორმულების მიხედვით.

როგორც მოყვანილი ცხრილიდან კარგად ჩანს, $\sigma_{0,\alpha}$ -ს მნიშვნელობები საკმაოდ დიდი სიზუსტით მიახლოებით გამოითვლება ნიუტონ-პიუზეს დიაგრამის საშუალებით $U_0(z)$ ანალიზური ფუნქციის გაშლით. სიზუსტე მით უფრო მეტი იქნება, რაც უფრო მეტი წევრი გვექნება $U_0(z)$ ანალიზური ფუნქციის გაშლაში.

$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\eta}$	$\boldsymbol{l}$	***R***	***P***	***Q***	$\sigma_{0,\alpha}-$ს მნიშვნელობები $U_0(1)-$ის გაშლის მიხედვით	$\sigma_{0,\alpha}-$ს მნიშვნელობები **(**)** ფორმულების მიხედვით
0.4	0.5	2	0.05	0.5	0.45	0.6368294587947232	0.6666666666666667
0.4	0.5	1	0.02	0.18	0.8	0.2225670563151243	0.22500000000000003
0.4	0.5	2	0.02	0.18	0.8	0.18919569783498935	0.18920243760451116

ცხრილი 2

ზოგად შემთხვევაში უსასრულო სტოქასტური $T_2^{(x)}(l\,,1,\varepsilon,\eta)$ ავტომატის $\sigma_{x,\alpha}$ და $\tau_{x,\alpha}$ ალბათური მახასიათებლების გამოთვლა ნებისმიერი სასტარტო $x = 0,1,2\ldots$ მდგომარეობისათვის შესაძლებელია შესაბამისი რიცხვითი ალგორითმით.

უსასრულო სტოქასტური $\boldsymbol{T_2^{(x)}(l\,,1,\varepsilon,\eta)}$ ავტომატის ქცევის ალბათური მახასიათებლების მიახლოებითი გამოთვლისათვის ნებისმიერი სასტარტო $\boldsymbol{x \geq 0}$ მდგომარეობისათვის ავაგოთ რიცხვითი ალგორითმი.

შემოვიღოთ შემდეგი პარამეტრები:

$$\varepsilon = \sqrt[l+1]{QP^l}, \quad \rho = \sqrt[l+1]{\frac{Q}{P}}$$

და განვიხილოთ ფუნქცია

$$W_x(z) = \rho^{x+1} U_x(z).$$

გავამრავლოთ (16) ρ^{x+1}-ზე. მივიღებთ, რომ

$$\rho^{x+1} U_x(z) = \rho^{x+1} Pz U_{x-1}(z) + \rho^{x+1} Qz U_{x+l}(z) + \rho^{x+1} Rz U_x(z).$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა კი შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$W_x(z) = \frac{\varepsilon z}{1-Rz} W_{x-1}(z) + \frac{\varepsilon z}{1-Rz} W_{x+l}(z) \tag{22}$$

$$W_{-1}(z) = U_{-1}(z) = 1.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$P\rho = P \sqrt[l+1]{\frac{Q}{P}} = \sqrt[l+1]{Q^m P^l} = \varepsilon \quad \text{და} \quad Q\rho^{-l} = Q \left(\sqrt[l+1]{\frac{Q}{P}} \right)^{-l} = \sqrt[l+1]{Q^m P^l} = \varepsilon.$$

(22)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$W_x(z) = \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d} \varepsilon^j R^{d-j} A_x^{(d-j)}(d)\, z^d.$$

მაშინ

$$U_x(z) = \rho^{-(x+1)} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d} \varepsilon^j R^{d-j} A_x^{(d-j)}(d)\, z^d,$$

ხოლო

$$u_{x,d} = \rho^{-(x+1)} \sum_{j=1}^{d} \varepsilon^j R^{d-j} A_x^{(d-j)}(d)\, z^d. \tag{23}$$

σ_x და τ_x-ის გამოსათვლელად საბოლოოდ გვექნება შემდეგი ფორმულები:

$$\sigma_x = \rho^{-(x+1)} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d} \varepsilon^j R^{d-j} A_x^{(d-j)}(d), \qquad \tau_x = \rho^{-(x+1)} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d} d\varepsilon^j R^{d-j} A_x^{(d-j)}(d).$$

ამ ფორმულებში განსაზღვრას საჭიროებენ $A_x^{(d-j)}(d)$ სიდიდეები, რომელთათვისაც (16)-დან (23)-ს გათვალისწინებით მიიღება შემდეგი ტოლობა

$$\rho^{-(x+1)} \left\{ \varepsilon\, R^d A_x^{(d)}(d+1) + \varepsilon^2\, R^{d-1} A_x^{(d-1)}(d+1) + \cdots + \varepsilon^{d+1} A_x^{(0)}(d+1) \right\} =$$

$$= P\rho^{-x} \left\{ \varepsilon\, R^{d-1} A_{x-1}^{(d-1)}(d) + \varepsilon^2\, R^{d-2} A_{x-1}^{(d-2)}(d) + \cdots + \varepsilon^d A_{x-1}^{(0)}(d) \right\} +$$

$$+ Q\rho^{-(x+l+1)} \left\{ \varepsilon\, R^{d-1} A_{x+l}^{(d-1)}(d) + \varepsilon^2\, R^{d-2} A_{x+l}^{(d-2)}(d) + \cdots + \varepsilon^d A_{x+l}^{(0)}(d) \right\} +$$

$$+ R\rho^{-(x+1)} \left\{ \varepsilon\, R^{d-1} A_x^{(d-1)}(d) + \varepsilon^2\, R^{d-2} A_x^{(d-2)}(d) + \cdots + \varepsilon^d A_x^{(0)}(d) \right\}.$$

$\rho^{-(x+1)}$-ზე გაყოფითა და $P\rho = Q\rho^{-l} = \varepsilon$ გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\sum_{j=1}^{d+1} \varepsilon^j R^{d-j+1} A_x^{(d-j+1)}(d+1) == \sum_{j=2}^{d+1} \varepsilon^j R^{d-j+1} A_{x-1}^{(d-j+1)}(d) + \sum_{j=2}^{d+1} \varepsilon^j R^{d-j+1} A_{x+l}^{(d-j+1)}(d) +$$
$$+\sum_{j=1}^{d+1} \varepsilon^j R^{d-j+1} A_x^{(d-j)}(d).$$

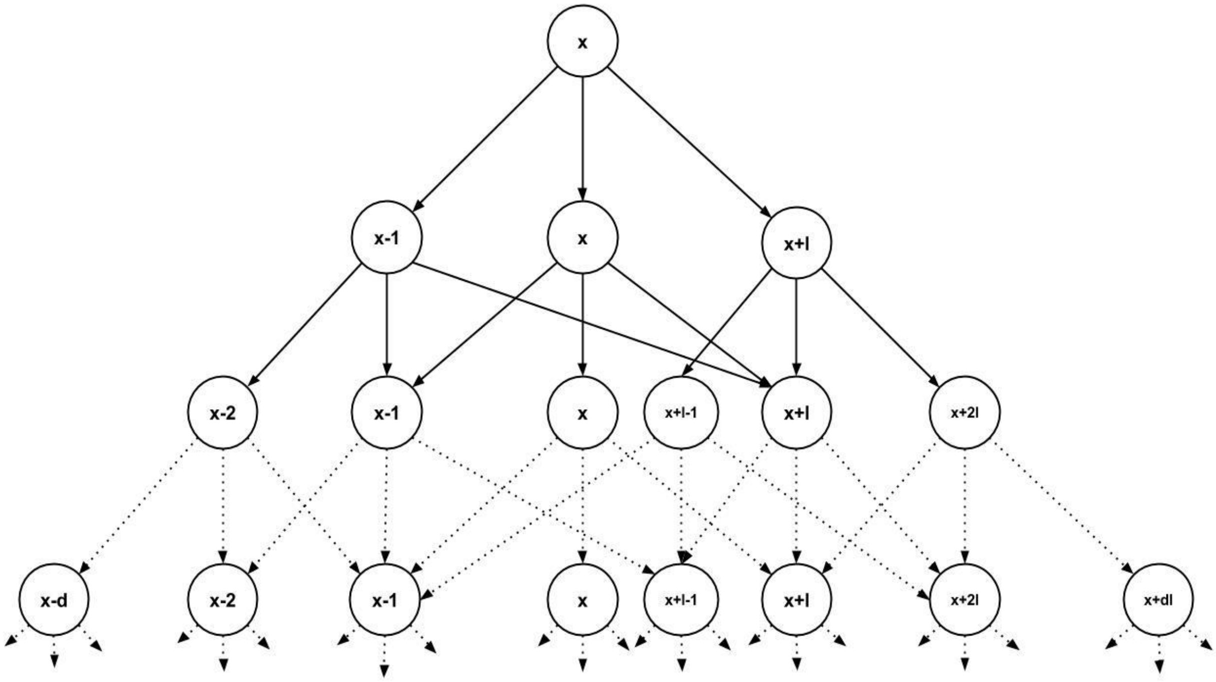
$\varepsilon^j R^{d-j}$ -ს კოეფიციენტების გატოლება კი გვაძლევს:

$$A_x^{(d-j)}(d) = A_{x-1}^{(d-j)}(d-1) + A_{x+l}^{(d-j)}(d-1) + A_x^{(d-j-1)}(d-1),$$
$$x \geq 0, \qquad j = 0,1,2,..d,$$
$$A_x^{(-1)}(d-1) = A_{x-1}^{(d)}(d) = A_{x+l}^{(d)}(d) = 0,$$
$$A_{-1}^{(0)}(0) = 1, \;\; A_{-1}^{(j)}(0) = 0, \;\; j = 1,..,d, \;\; A_x^{(j)}(0) = 0 \;\; \forall x \geq 0, j = 0,1,..,d.$$

$A_x^{(d-j)}(d)$ სიდიდეების საპოვნელად საჭიროა იმ გზების განსაზღვრა, რომელთაც ავტომატი სასტარტო $x \geq 0$ მდგომარეობიდან მიყავთ მოქმედების შეცვლამდე (ნახ.3).

თუ რომელიმე d $(d = 1,2,\ldots)$- თვის $x - d \geq 0$ პირობა არ სრულდება, ეს ნიშნავს, რომ ავტომატს $d -$ ურ ტაქტზე შეუძლია მოქმედება შეცვალოს. ადვილი შესამჩნევია, რომ ყოველ იარუსზე შეიძლება ასეთი დამამთავრებელი მდგომარეობა იყოს მხოლოდ ერთი და მისი ნომერია -1.

ავღნიშნოთ $N(d)$-თი $d -$ური იარუსის შესაძლებელ მდგომარეობათა მაქსიმალური ნომერი, ხოლო $H^{(d-j)}(x,i,d)$- გზათა რაოდენობა, რომელიც ავტომატის x მდგომარეობას გადაიყვანს d -ური იარუსის j- ურ მდგომარეობაში გზაში $d - j$ რაოდენობის გაჩერებით. ცხადია, რომ $N(d) = x + ld$, ხოლო $H^{(d-j)}(x,i,d)$ სიდიდეთა განსაზღვრისათვის გვექნება შემდეგი რეკურენტული თანაფარდობა:



ნახ. 3. $\boldsymbol{L}$ ქვესიმრავლეში უსასრულო სტოქასტური $\boldsymbol{T_2^{(x)}(l\,, 1; \varepsilon, \eta)}$ ავტომატის მდგომარეობებს შორის გადასვლის გრაფი $\boldsymbol{x - d \geq 0}$ პირობით.

$$H^{(d-j)}(x, N(d) - i, d) =$$
$$= H^{(d-j)}(x, N(d-1) + l + 1 - i, d-1)\, \mu(N(d-1) + l + 1 - i) +$$
$$+ H^{(d-j)}(x, N(d-1) - i, d-1)\, \mu(N(d-1) - i) +$$
$$+ H^{(d-j)}(x, N(d-1) + l - i, d-1)\ \ \mu(N(d-1) + l - i),$$

$$H^{(d-j)}(x, N(d), d) = \begin{cases} 1, & j = d \\ 0, & j \neq d \end{cases}, \qquad H^{(d-j)}(x, x-1, 1) = \begin{cases} 1, & j = d \\ 0, & j \neq d \end{cases},$$

$$H^{(d-j)}(x, x, 1) = \begin{cases} 1, & j = d-1 \\ 0, & j \neq d-1 \end{cases}, \ \ H^{(d-j)}(x, i, 1) = 0 \quad , \qquad \forall\ i \neq x,\ \ x-1, x+l,$$

$$H^{(-1)}(x, i, d) = 0\ \ ,\ \ \forall\ i,\ d,\ N(d) = x + ld.$$

$$j = 1,2, \dots, d,\ \ i = 1,2, \dots, x + dl,\ \ \mu(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases};$$

მაშინ $\quad A_x^{(d-j)}(d) = H^{(d-j)}(x, -1, d)$ და საბოლოოდ გვექნება, რომ

$$\sigma_x = \rho^{-(x+1)} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d} \varepsilon^j R^{d-j} H^{(d-j)}(x, -1, d),$$

$$\tau_x = \rho^{-(x+1)} \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d} d\, \varepsilon^j R^{d-j} H^{(d-j)}(x, -1, d).$$

x	d	l	P	Q	σ_x	sigma kerzo	τ_x
1	3	1	0.18	0.8	0.225683992	0.225999999	1.39135973
1	3	2	0.18	0.8	0.179202438	0.189202438	1.78405816

ცხრილი 3

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов. М., Мир, 1971.

2. Цетлин М. Л. Исследование по теории автоматов и моделированию биологических систем. М., Наука, 1969.

3. Королюк В. С., Плетнев А. И., Эйдельман С. Д. Автоматы. Блуждания. Игры. Успехи математических наук. Т. 43, вып. 1(259), 1988.

4. Срагович В. Г. Теория адаптивных систем. М., Наука, 1976.

5. Хведелидзе Т. Д. О собственных значениях цепей Маркова, порожденных функционированием асимптотически оптимальных автоматов при трех типах реакций стационарной случайной среды. Труды ТГУ, 1988, т. 272.

6. Хведелидзе Т. Д. Об одной конструкции конечного автомата в стационарной случайной среде с კომპიუტერული მეცნიერებები და ტელეკომუნიკაციები http//gesj. Internet-academy. Org.ge N2(34), 2012.7. Анализ поведения конечного стохастического

автомата в тернарной стационарной случайной среде. ქ.ე.ს.ჟ. კომპიუტერული მეცნიერებები და ტელეკომუნიკაციები http//gesj. Internet-academy. Org.ge N2(46), 2015.

დანართი

დანართში აღწერილი არის სამაგისტრო ნაშრომის ფარგლებში შექმნილი პროგრამული უზრუნველყოფა, მისი შესაძლებლობები, მთავარი აქტორები და ინსტალაციის ინსტრუქცია.

პროგრამული ურუნველყოფის აღწერა

სამაგისტრო ნაშრომის ფარგლებში შექმნილი პროგრამული უზრუნველყოფის მთავარი მიზანი არის ხელი შეუწყოს მის მომხმარებლებს ნაშრომში განხილული ალგორითმების მეშვეობით გამოთვლების განხორციელებაში, სხვადასხვა, მისთვის (მომხმარებელისათვის) სასურველი ალგორითმისათვის საჭირო პარამეტრებისათვის.

სისტემა გამიზნული არის მომხმარებლებისათვის, რომლებიც დაინტერესებული არიან განახორციელონ დაიმპლემენტირებული ალგორითმების გამოთვლები და მათი შედეგების ანალიზი.

სისტემა მომხმარებელს საშუალებას აძლევს განახორციელოს გამოთვლები, იხილოს გამოთვლების შედეგები რეალურ დროში, ასევე თვალი ადევნოს წარსულში მიღებულ შედეგებსა და მის პარამეტრებს, საჭიროების შემთხვევაში გაასუფთავოს (წაშალოს) არა-საჭირო შედეგები. ყოველი გამოთვლა და მისთვის საჭირო პარამეტრები ინახება მონაცემთა ბაზაში, რათა მუდმივად იყოს ხელმისაწვდომი საჭიროებისამებრ.

სისტემა არის დაცული არა ავტორიზებული წვდომისაგან, შესაბამისად არა-ვერიფიცირებული მომხმარებლები ვერ შეძლებენ მასში შეღწევას და მის მართვაზე კონტროლის დამყარებას.

პროგრამული უზრუნველყოფის ფუნქციები

მოხმარების შემთხვევის კლასი	მოხმარების შემთხვევა	მოხმარების შემთხვევის აღწერა
სისტემაზე წვდომა	სისტემაზე წვდომა დარეგისტრირებული მომხმარებლის მიერ, ვებ-ბრაუზერი მეშვეობით	სისტემასთან დაკავშირება მომხმარებლის მიერ ავტორიზაციისა და აუთენტიფიკაციის გავლის შემდგომ.

მომხმარებელი	მომხმარებლის დამატება	მოახდენს ახალი მომხმარებლის დამატებას.
	მომხმარებლის რედაქტირება	მოახდენს ახალი არსებული მომხმარებლის რედაქტირებას (მაგ. პაროლის ცვლილება). შესაძლებელია არსებული მომხმარებელის დროებითი დაბლოკვა.
	მომხმარებლის წაშლა	მოახდენს არსებული, დარეგისტრირებული მომხმარებლის წაშლას.
ფორმულა	შედეგებისა და პარამეტრების დათვალიერება	ფორმულის არსებული, უკვე გამოთვლილი შედეგებისა და შესაბამისი პარამეტრეის დათვალიერება.
	ახალი გამოთვლა	ახალი გამოთვლის განხორციელება. მოხდება გამოთვლისათვის საჭირო პარამეტრების გადაცემა, მიღებული შედეგი ხილვადი იქნება,გამოთვლისთანავე.
	ექსპორტი	მიღებული შედეგებისა და პარამეტრების ექსპორტი ცხრილის სახით.

მთავარი აქტორები

პროგრამული უზრუნველყოფას ყავს ორი მთავარი აქტორი „მომხმარებელი“ და „სისტემა“, მომხმარებელი თავის მხრივ არის 2 სახის:

1. „ადმინისტრატორი“ – მომხმარებელი, რომელსაც შეუძლია დაამატოს / წაშალოს / დაარედაქტიროს სისტემის მომხმარებლები, შეუზღუდოს ან მიანიჭოს უფლებები არსებულ მომხმარებლებს. ადმინისტრატორი რათქმაუნდა აღჭურვილი არის სისტემაზე წვდომის უფლებით, მას შეუძლია განახორციელოს ნებისმიერი ის ოპერაცია რასაც ახორციელებს ჩვეულებრივი მომხმარებელი.
2. „არა ადმინისტრატორი“ - მომხმარებელი, რომელსაც აქვს სისტემაზე წვდომის უფლება, მისი ოპერირება შეზღუდული არის ადმინისტრატორის მიერ მინიჭებული უფლებებით.

დაშვებები და დამოკიდებულებები

1. სისტემაზე წვდომა აქვს ყველა დარეგისტრირებულ მომხმარებელს, რომელებიც არ არიან დაბლოკილები ადმინისტრატორის მიერ.
2. გამოთვლების ჩატარება შეუძლია ყველა იმ დარეგისტრირებულ მომხმარებელს, რომლებიც აკმაყოფილებენ 1 მოთხოვნას და აქვთ მინიჭებული წვდომა შესაბამისი ალგორითმის მოდულზე.
3. მომხმარებლების მართვას უზრუნველყოფს ის მომხმარებელი, რომელიც აკმაყოფილებს 1 მოთხოვნას და სარგებლობს ადმინისტრატორის უფლებით.

გამოყენებული ტექნოლოგიები და საშუალებები

1. Java JDK 1.8 - http://www.oracle.com/technetwork/java/index.html
2. Google Web Toolkit (GWT) 2.7.0 - http://www.gwtproject.org/
3. Sencha GXT 3.1 - https://www.sencha.com/products/gxt
4. Java Persistence API (JPA) 2.1 - http://www.oracle.com/technetwork/java/javaee/tech/persistence-jsp-140049.html
5. Apache POI 3.14 - https://poi.apache.org/
6. WildFly 8.2.1 - http://www.wildfly.org/
7. SQL Server Express Edition 2014 - https://www.microsoft.com/web/platform/database.aspx

პროგრამის ინსტალაციის ინსტრუქცია

1. გადმოწერეთ და დააინსტალირეთ MSSQL Express Edition მონაცემთა ბაზა
    a. გადმოწერა შესაძლებელია შემდეგი მისამართიდან: https://www.microsoft.com/en-us/download/details.aspx?id=42299
2. აღადგინეთ პროგრამისათვის საჭირო ბაზა
    a. გადმოსაწერი მისამართი: https://goo.gl/uQmi5j
3. გადმოწერეთ პროგრამა და აპლიკაციის სერვერი
    a. გადმოსაწერი მისამართი: https://goo.gl/PhlrL5
4. შეასწორეთ მონაცემთა ბაზის მომხმარებლის სახელი და პაროლი აპლიკაციის სერვერის კონფიგურაციის ფაილში (...\standalone\configuration\standalone.xml)
    a. გახსენით ...\standalone\configuration\standalone.xml ნებისმიერი ტექსტური რედაქტორით
    b. გახსნილ ფაილში იპოვეთ datasource, რომლის jndi სახელი არის: java:jboss/datasources/StochAutomatsDS
    c. ზემოხსენებული datasource-ის ქვეშ შეასწორეთ: user-name და password
    d. დაიმახსოვრეთ ცვლილებები.
5. ჩართეთ აპლიკაციის სერვერი
    a. გახსენით შემდეგი მისამართი: …/app_server/bin/
    b. გააქტიურეთ run.bat ფაილი
6. დაამყარეთ პროგრამაზე წვდომა ნებისმიერი ვებ-ბრაუზერის მეშვეობით, ლოკალური კომპიუტერიდან შემდეგ მისამართზე: http://localhost:8080/stochastic-automats